

Le ombre: una prospettiva geometrica

di S. Viva

Nucleo Tematico
L'energia e le sue trasformazioni

Autore
Salvatore Viva

Referente scientifico
Riccardo Govoni

Indice

Introduzione	3
Le ombre fanno luce sul sistema solare.....	4
Un'ombra famosa.....	12
Ombre e geometria: relazione di omotetia e di similitudine.....	17
Relazione di "omotetia" e "similitudine"	17
Ombre e omotetia.....	18
Le parole della geometria	23
Sitografia.....	26

Introduzione

Ci sono concetti che, quando si strutturano completamente, possono essere visti da punti diversi. Consideriamo, come esempio, il problema della determinazione del “volume di un parallelepipedo”: dal punto di vista della geometria si tratta di applicare correttamente una serie di definizioni, di proprietà e di teoremi, per arrivare a una procedura di calcolo della grandezza considerata. Dal punto di vista della fisica, la determinazione di un volume può essere un problema di calcolo, ma può essere anche un problema di misura, da risolvere con procedure molto diverse dal calcolo; per esempio si potrebbe misurare il volume di un parallelepipedo di ferro misurandone la massa/peso, se si conosce la densità del ferro.

La visione della matematica è del tutto astratta e, in ultima analisi, richiede solo che si parta da proposizioni primitive (assiomi) che abbiano come unica proprietà quella di non essere contraddittorie e che si usino correttamente le regole della logica; a rigore non necessita di alcun rapporto col mondo sensibile. In pratica, però, tanta matematica è nata per risolvere problemi dati da scienze empiriche e ci sono teorie scientifiche nelle quali l'apparato matematico è imponente.

Ne consegue che **visione matematica e visione naturalistica devono convivere**; anzi, nell'età di formazione scolastica, specie nelle fasi in cui le capacità di astrazione sono in costruzione, **la matematica e le scienze dovrebbero viaggiare strettamente unite**, in modo da costruire i concetti e le teorie matematiche partendo da problemi scientifici e, simmetricamente, imparare a matematizzare i collegamenti fra i fenomeni che si osservano.

Da questo punto di vista lo studio delle ombre costituisce un ambito privilegiato, perché può diventare, da gioco di osservazione nella scuola primaria, analisi di proprietà geometriche piuttosto raffinate.

I riferimenti ad attività di ogni tipo (e per tutte le età), che si possono fare con le ombre sono numerosissimi e, in seguito, proporrò quelli che mi sono sembrati più interessanti. Cercherò di dare alcune indicazioni sul **rapporto ombre-geometria**, in modo che anche i colleghi che non hanno avuto, nel loro corso di studi, esperienza diretta di



questi argomenti, possano trarre qualche vantaggio conoscitivo, vedendo dove si può andare a parare se si intraprende un percorso sulle ombre.

Le ombre fanno luce sul sistema solare



Nei cinque riferimenti sitografici proposti di seguito si possono trovare, presentati con chiarezza e in modo dettagliato, alcuni usi delle ombre che si possono osservare sulla Luna o di quelle proiettate dalla Terra e dalla Luna durante le eclissi:

Eclissi lunare

by [Luc Viatur](#) (CC BY-SA 3.0)

- Riferimento 1
http://www.brera.unimi.it/lerukids/IT/Luna_Lerukids.pdf
- Riferimento 2
http://www.planetariodicaserta.it/joomla/images/scheda_montagne_galileo.pdf
- Riferimento 3
http://www.df.unipi.it/~penco/Astronomia/Testi/Parte_1/p1c03rf.pdf
- Riferimento 4
<http://www.df.unipi.it/~giudici/aristarco.pdf>
- Riferimento 5
<http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2010/04/La-geometria-del-cielo.pdf>

È da notare, prima di tutto, la genialità degli antichi che hanno misurato il sistema solare usando solo osservazioni visuali e conoscenze di geometria ai loro tempi patrimonio di pochi sapienti, ma che ora possiamo riproporre ad alunni della secondaria di primo grado.

Le misure degli antichi miravano a una descrizione geometrica dell'universo così come si presentava ai loro occhi. Quelle di Galileo, che usa uno strumento che potenzia le capacità visive, hanno un senso più ampio e rivoluzionario, perché sono usate per

scardinare opinioni radicate per moltissimi secoli, e così profondamente interiorizzate da essere inglobate anche in sistemi religiosi raffinati e influenti. **Non sono solo una descrizione geometrica del mondo; sono l'affermazione della unitarietà della fisica terrestre e celeste.**

In questo paragrafo cercherò di proporre dei commenti e delle indicazioni didattiche a corredo dei contenuti degli articoli proposti.

Cominciamo dal primo dei riferimenti:

http://www.brera.unimi.it/lerukids/IT/Luna_Lerukids.pdf

Si tratta di un lavoro proposto dall'Istituto di Fisica Generale ed Applicata dell'Università di Milano, sezione Storia della Fisica, nell'ambito del consorzio LERU, League of European Research Universities.

In vari paragrafi sono illustrate le caratteristiche più interessanti della Luna; nell'ultimo è proposta un'attività da far eseguire a studenti di secondaria, anche di primo grado. Sfruttando fotografie della superficie lunare e nozioni di geometria elementare, si misurano le dimensioni di qualche cratere e di qualche montagna della Luna.

Gli alunni hanno a disposizione una foto, dalla quale ricavare con un righello le dimensioni lineari del cratere in esame ed hanno, come dato, la misura del diametro reale della Luna; poi, usando opportune proporzioni ricavano la grandezza richiesta (figura 1).

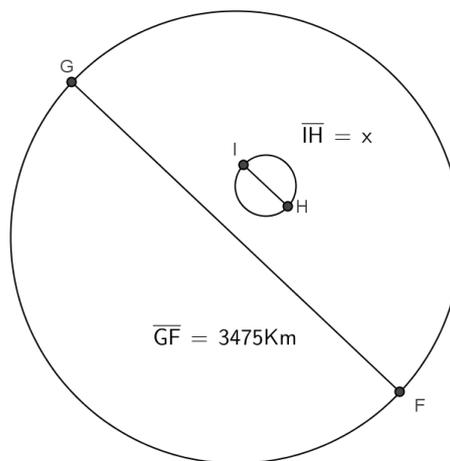


Figura 1

Quali possono essere le considerazioni didattiche da fare se si lavora con alunni della secondaria di primo grado?

Innanzitutto spiegare in dettaglio che la fotografia (figura piana) della faccia della Luna è una riduzione che non conserva i rapporti fra le dimensioni degli oggetti che si trovano sulla Luna (corpo solido sferico) e che la relazione di proporzionalità vale solo per particolari zone della superficie .

Nel calcolo dell'altezza della montagna si scrive una proporzione fra misure di angoli e misure di tempi: si assume, implicitamente, che il moto angolare della Luna sia costante. Bisognerebbe esplicitarlo con chiarezza e discutere con ampiezza di particolari le condizioni in cui l'assunto è sufficientemente valido.

Un'altra considerazione riguarda l'uso delle proporzioni, che dovrebbero essere usate con molta parsimonia, per non ingenerare l'idea che le proporzioni risolvano ogni problema di calcolo (impiantiamo una proporzione). Meglio sarebbe introdurre il fattore di scala, che, oltretutto, potrebbe ridurre le incertezze degli alunni nel ricavare le diverse grandezze di una proporzione.

Infine, ***come si ricava il valore del diametro della Luna, visto che non può essere il risultato di una misura diretta? Come hanno valutato le dimensioni del sistema solare gli antichi, che non disponevano certo delle tecnologie moderne?***

“[...] Dimensioni del sistema solare (ndr), il cui numero è assai maggiore della distanza dal concavo lunare al centro della Terra, che è miglia 196.000, facendo la distanza del concavo 56 semidiametri terrestri, come fa l'autore moderno, ed il semidiametro della Terra 3500 miglia di braccia 3000 l'uno, quali sono le nostre miglia italiane [...]”

È una citazione dalla giornata prima del “*Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*” di Galileo Galilei, che ci fa conoscere i dati in suo possesso. Valutando 0,58m un braccio fiorentino, si ricava che, per Galileo, il diametro della Terra era 12.180 Km; mentre la distanza Terra-Luna (la distanza dal concavo lunare, cioè dal luogo dell'orbita lunare, al centro della Terra) era 341.040 Km.

Secondo le misure attuali, i valori sono per la distanza media della Luna dalla Terra di circa 384.400 km; per il diametro della Terra 12742 Km, mediando sullo schiacciamento. Si vede che **i valori di Galileo erano più piccoli di quelli moderni, ma erano abbastanza bene approssimati**; sul diametro della Terra la differenza è minore del 5%. Ma come erano stati ottenuti?

Il secondo riferimento sitografico

http://www.planetariodicaserta.it/joomla/images/scheda_montagne_galileo.pdf

è quasi esclusivamente dedicato alla misura dell'altezza di una montagna della Luna, fatta da Galileo.

Dal terzo riferimento sitografico

http://www.df.unipi.it/~penco/Astronomia/Testi/Parte_1/p1c03f.pdf

si può ottenere una esposizione chiara e completa dei sistemi antichi di misura delle grandezze astronomiche.

Fra tutte quelle proposte nel riferimento precedente, consideriamo più in dettaglio la misura della distanza Terra-Luna, dove le ombre sono le protagoniste. Si tratta di usare in maniera geniale i dati ricavati dalle osservazioni delle eclissi totali di Luna, schematicamente rappresentate dalle figura 2.

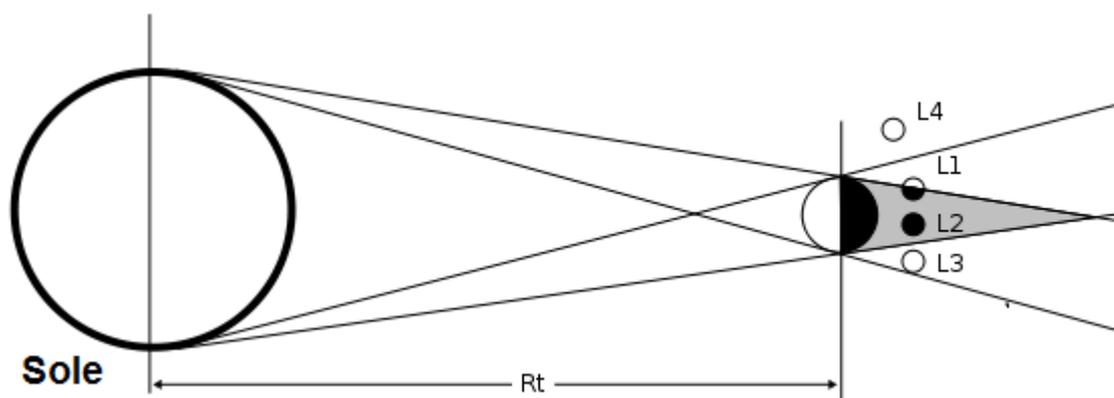


Figura 2 – Eclissi di Luna

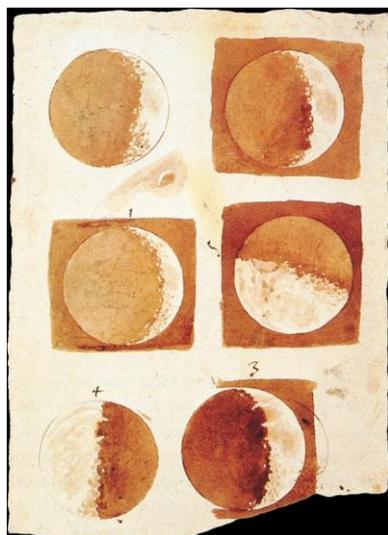
Si vede che le grandezze che entrano in gioco durante l'eclisse sono:

- **grandezza e distanza del Sole;**
- **grandezza e distanza della Luna;**
- **grandezza della Terra e del cono d'ombra in cui penetra la Luna durante l'eclissi.**

I riferimenti sitografici 4 e 5 possono fornire ulteriori informazioni.

Veniamo a Galileo Galilei.

Galileo usa il telescopio, osserva lungamente la Luna e disegna quello che vede.



Fasi della Luna disegnate da Galileo

“[...] E finalmente, non risparmiando fatiche e spese, venni a tanto da costruirmi uno strumento così eccellente, che gli oggetti visti per il suo mezzo appaiono ingranditi quasi mille volte e trenta volte più vicini che visti a occhio nudo

[...].”

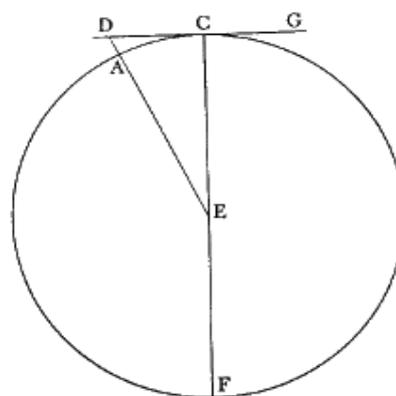
“[...] Queste macchie alquanto scure e abbastanza ampie, ad ognuno visibili, furono scorte in ogni tempo; e perciò le chiameremo grandi o antiche, a differenza di altre macchie minori per ampiezza ma pure così frequenti da coprire l'intera superficie lunare, soprattutto la parte più luminosa: e queste non furono viste da altri prima di noi. Da osservazioni più volte ripetute di tali macchie fummo tratti alla convinzione che la superficie della Luna non è levigata, uniforme ed esattamente sferica, come gran numero di filosofi credette di essa e degli altri corpi celesti, ma ineguale, scabra e con molte cavità e sporgenze, non diversamente dalla faccia della Terra, variata da catene di monti e profonde valli [...].”



Insomma, le piccole macchie che si vedono, col cannocchiale, non sono altro che ombre prodotte da montagne sulla superficie della Luna.

Galileo non si accontenta di una descrizione qualitativa, e fornisce una misura dell'altezza di una montagna della Luna; ma questa volta non usa un'ombra proiettata in uno sfondo chiaro, ma una macchiolina luminosa nella parte scura della Luna. È abbastanza curioso il fatto che, su praticamente tutti i testi scolastici che ho consultato, si dica che Galileo misura l'altezza della montagna a partire dalla sua ombra...

"[...] Avendo io più e più volte osservato, in diverse posizioni della Luna rispetto al Sole, che nella parte tenebrosa della Luna alcuni vertici, anche se abbastanza lontani dal confine della luce, ne apparivano pervasi, mettendo a raffronto la loro distanza con l'intero diametro della Luna, accertai che questa distanza supera talvolta la ventesima parte del diametro. Stabilito questo, si pensi il globo lunare, il cui circolo massimo sia CAF, il centro E, il diametro



CF, che sta al diametro della terra come due a sette; poiché il diametro terrestre, secondo le più esatte osservazioni, misura 7000 miglia italiane, sarà CF 2000, CE 1000, la ventesima parte di tutto CF 100 miglia. Sia ora CF il diametro del circolo massimo, che divide la parte luminosa della Luna da quella oscura (infatti per la grandissima lontananza del Sole dalla Luna questo circolo non differisce sensibilmente dal circolo massimo) e A disti dal punto C la ventesima parte di quel diametro: si prolunghi il semidiametro EA, fino all'incontro nel punto D della tangente GCD (che rappresenta il raggio illuminante). Sarà dunque l'arco CA, o il segmento CD, 100 di tali parti delle quali CE è 1000, e la somma dei quadrati di DC e di CE 1.010.000, alla quale è uguale il quadrato di DE: dunque tutta ED sarà più di 1004, e AD più di 4 di tali parti, delle quali CE è 1000. Nella Luna dunque l'altezza AD, che designa un qualsiasi vertice elevato fino al raggio solare GCD e lontano dal confine C per la distanza CD, supera le 4 miglia italiane. Sulla Terra non vi son monti che giungano a un miglio di altezza perpendicolare: resta dunque evidente che le sopraelevazioni lunari sono più alte di quelle terrestri [...]"

Come conclusione, due battute dal Dialogo.

Si potrebbe spiegare meglio, anche ad un ragazzo di oggi, la novità difesa da Galileo?

SIMPLICIO: “Eccovi, per la prima, due potentissime dimostrazioni per prova che la Terra è differentissima da i corpi celesti. Prima, i corpi che sono generabili, corruttibili, alterabili, etc., son diversissimi da quelli che sono ingenerabili incorruttibili, inalterabili, etc.: la Terra è generabile, corruttibile, alterabile, etc., e i corpi celesti ingenerabili, incorruttibili, inalterabili, etc.: adunque la Terra è diversissima da i corpi celesti.

Quel corpo che è per sua natura oscuro e privo di luce, è diverso da i corpi luminosi e risplendenti: la Terra è tenebrosa e senza luce; ed i corpi celesti splendidi e pieni di luce: adunque etc.

...La sensata esperienza ci mostra come in Terra si fanno continue generazioni, corruzioni, alterazioni, etc., delle quali né per senso nostro, né per tradizioni o memorie de' nostri antichi, se n'è veduta veruna in cielo; adunque il cielo è inalterabile etc., e la Terra alterabile etc., e però diversa dal cielo. Il secondo argomento cavo io da un principale ed essenziale accidente; ed è questo. Quel corpo che è per sua natura oscuro e privo di luce, è diverso da i corpi luminosi e risplendenti: la Terra è tenebrosa e senza luce; ed i corpi celesti splendidi e pieni di luce: adunque etc. Rispondasi a questi.”

SALVIATI: “Adunque dal non veder voi le alterazioni in cielo, dove, quando vi fussero, non potreste vederle per la troppa distanza, e dal non ne aver relazione, mentre che aver non si possa, non potete arguir che elle non vi sieno, come dal vederle e intenderle in Terra bene arguite che le ci sono.

... ne i corpi particolari e nell'universale espansione del cielo si son visti e si veggono tuttavia accidenti simili a quelli che tra di noi chiamiamo generazioni e corruzioni, essendo che da astronomi eccellenti sono state osservate molte comete generate e disfatte in parti piú alte dell'orbe lunare, oltre alle due stelle nuove dell'anno 1572 e del 1604, senza veruna contradizione altissime sopra tutti i pianeti; ed in faccia dell'istesso Sole si veggono, mercé del telescopio, produrre e dissolvere materie dense ed oscure



in sembianza molto simili alle nugole intorno alla Terra, e molte di queste sono cosí vaste, che superano di gran lunga non solo il sino Mediterraneo, ma tutta l'Affrica e l'Asia ancora. Ora, quando Aristotile vedesse queste cose, che credete voi, signor Semplicio, ch'e' dicesse e facesse?"

Un'ombra famosa



Piramide di Cheope

by [poco a poco](#) (CC BY-SA 3.0)

Si tratta, è quasi ovvio, dell'ombra della Piramide per antonomasia, quella di Cheope a Giza.

È noto (o dovrebbe esserlo, visto che viene riportato in tutti i testi di geometria e di scienze) che l'ombra servì a Talete per misurare l'altezza della piramide. Sulla tecnica effettivamente usata da Talete ci sono varie controversie, che sono discusse

nel testo di Aldo Bonnet che si può scaricare al seguente indirizzo:
http://www.storiadellamatematica.it/La%20Scienza%20di%20Talete%2010_05_2010.pdf

Non volendo seguire una (probabile) ricostruzione storica, utilizziamo i dati a nostra disposizione (ottenuti, per esempio, da Wikipedia) e utilizziamo conoscenze e tecniche che gli alunni acquisiranno gradualmente, dalla scuola dell'infanzia (allineamento delle ombre col Sole), alla secondaria di primo grado (teorema di Talete, triangoli simili).

I dati sono i seguenti:

Coordinate:

- 1) latitudine $29,98^\circ$ N (nei calcoli e nel disegno approssimeremo a 30°)
- 2) longitudine 31° E

Dimensioni:

- 3) altezza 146m
- 4) lati di base 230,36m

Direzioni dei lati del quadrato di base della base: quasi esattamente E-W e N-S.

Osserviamo la figura 5

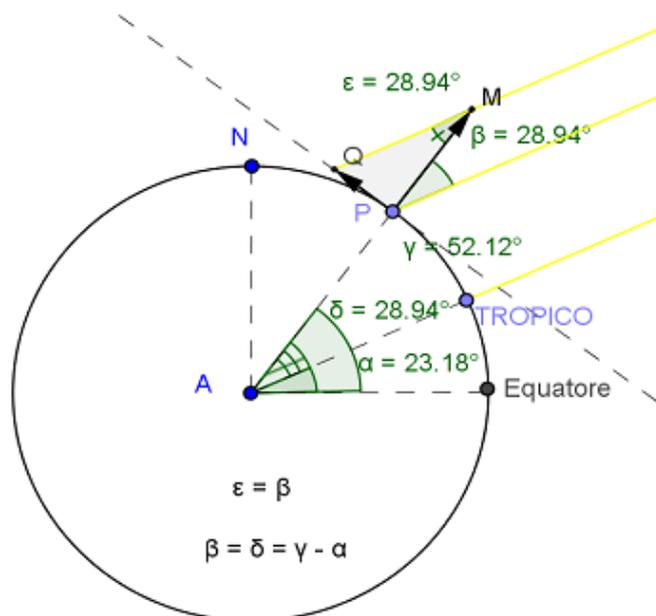


Figura 5

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mQ4E0vwdU>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[piramide-fig5.ggb](#)]

In giallo sono rappresentati i raggi del Sole a mezzogiorno del solstizio d'estate, quando cadono perpendicolari alla superficie della Terra nei punti che si trovano lungo il Tropico del Cancro. Un osservatore posto al tropico vedrà, a mezzogiorno, il Sole sulla sua testa, nella direzione del filo a piombo, grosso modo. Un osservatore che si trovi ad altra latitudine vedrà, nello stesso momento, i raggi provenire da una direzione differente. Nella figura il secondo osservatore è in P e l'angolo formato dalla sua verticale e dalla direzione dei raggi è β . Un palo verticale PM proietterà sul suolo un'ombra PQ. L'angolo \widehat{MQP} definisce l'altezza del Sole.

Si vede dalla figura che l'altezza è l'angolo complementare di β che è uguale all'angolo ε (sono alterni interni). Ma $\beta = \delta$ perché corrispondenti.

Ne deriva che l'altezza del Sole in P è il complementare della differenza fra la sua latitudine e quella del tropico. Se P è vicino al tropico quella differenza sarà piccola, quindi il Sole sarà molto alto; sarà più basso per punti lontani dal tropico.

Un disegno analogo mostrerebbe che, al solstizio d'inverno, l'altezza è il complemento della somma fra le latitudini del luogo e del tropico del Capricorno (in effetti, se si danno valori negativi alle latitudini sud, si tratta sempre di una differenza algebrica).

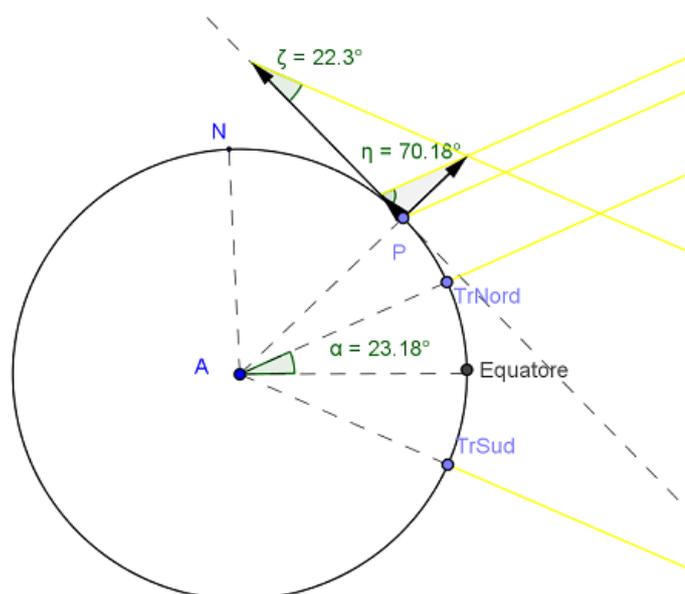


Figura 6

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mkP5LCHoh>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[piramide-fig6.ggb](#)]

La figura 6 sovrastante mostra immediatamente la differenza fra le ombre ai solstizi d'estate e d'inverno, ma è più interessante osservare il loro rapporto. Per un palo posto in P, a latitudine circa 45° , si vede che l'ombra al solstizio d'estate è meno della metà del palo, mentre d'inverno è più del doppio.

Aperto il file, si potrà muovere il punto P e portarlo nella posizione della Piramide: l'ombra d'estate è una frazione molto piccola dell'altezza del palo. Si potrebbe calcolarla con qualche triangolo simile opportuno oppure, conoscendo gli elementi fondamentali della trigonometria, osservando che:

- lunghezza dell'ombra = (lunghezza del palo) \times (cotangente dell'altezza del Sole)

Per un palo alto quanto la Piramide si avrebbe (i calcoli sono approssimati al metro):

- lunghezza dell'ombra a mezzogiorno del solstizio d'estate = $146 \times \text{ct}(90 - (30 - 23)) = 18\text{m}$
- lunghezza dell'ombra a mezzogiorno del solstizio d'inverno = $146 \times \text{ct}(90 - (30 + 23)) = 194\text{m}$

Si vede, così, che il 21 di giugno a mezzogiorno la Piramide non fa ombra o meglio l'ombra cade al suo interno, mentre il 21 dicembre alla stessa ora l'ombra si allontanerà di $194 - 115 = 79\text{m}$ dalla base.

Perché l'ombra a mezzogiorno?

La Piramide non è un palo, quindi si può misurare solo la parte esterna dell'ombra, che cambia lunghezza e direzione al cambiare dell'ora.

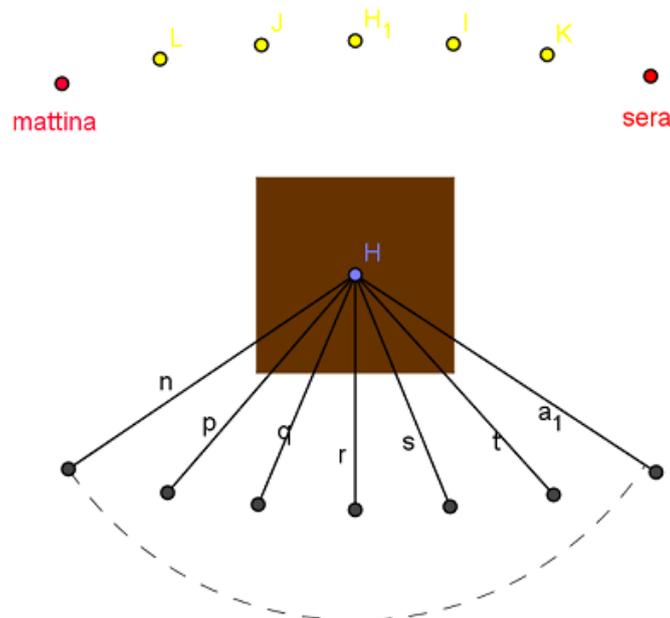


Figura 7

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mW4tc8OLI>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[piramide-fig7.ggb](#)]

Non si può misurare direttamente la parte interna dell'ombra, perché il punto H è inaccessibile. Solamente quando la direzione del Sole punta direttamente a Sud e la luce sfiora due facce della Piramide, la parte interna dell'ombra è esattamente la metà del lato di base e quindi è facile calcolare la lunghezza dell'ombra, costruire una coppia di triangoli simili e quindi ricavare l'altezza della Piramide. Tutti sono concordi nell'attribuire a Talete questo "trucco", ma nel testo di Bonnet citato sopra vengono riportate costruzioni, che possono ragionevolmente, secondo l'autore, essere ricondotte a Talete, con le quali diventa possibile misurare l'altezza in ogni ora del giorno.

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mBXnonhO9>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[ombre_dal_sole_2.ggb](#)]

Di seguito è riportata la figura che riproduce la situazione al solstizio d'inverno, animabile con la solita procedura.

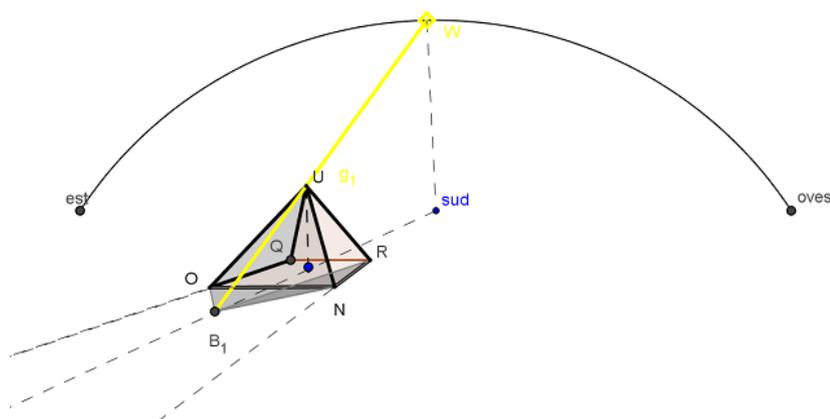


Figura 8

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mQJ8zuqAM>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[piramide-fig8.ggb](#)]

Nota: alla figura 7, che mostra direzione e lunghezza dell'ombra di un palo al variare dell'ora, è stato aggiunto un arco di circonferenza, in modo da correggere una affermazione che si trova su qualche testo e cioè che la punta del palo descriva un arco di circonferenza. Si tratta, invece, di un arco di iperbole, eccetto che nel giorno degli equinozi, dove, invece, è un segmento. Una spiegazione semplice ed efficace di questo fatto, ed altri, si può trovare al seguente indirizzo:

<http://www.ilpaesedellemeridiane.com/festemeridiane/pub/01lib/03sim/x.tm>.

Ombre e geometria: relazione di omotetia e di similitudine

Relazione di "omotetia" e "similitudine"

Nella figura 9 sottostante ci sono quattro triangoli, T1, T2, T3, T4, che hanno tutti la stessa forma, anzi tre di essi possiamo dire che sono "uguali", mentre l'altro, il primo, è una "riduzione in scala", degli altri. Come si definiscono, in geometria, le relazioni tra queste figure?

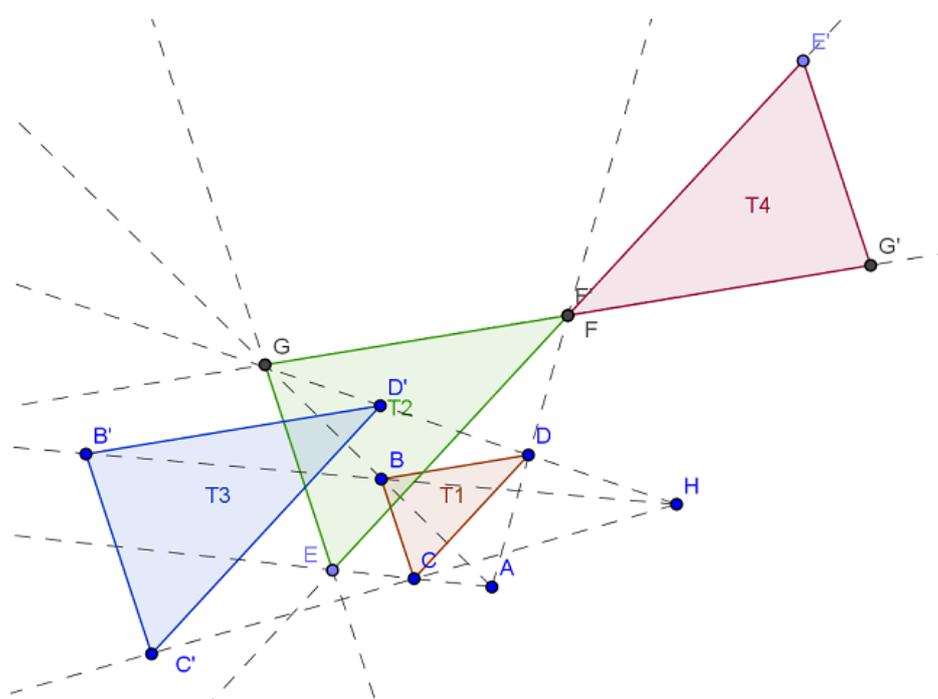


Figura 9

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mD8pK84V0>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[omotetia e similitudine.ggb](#)]

Consideriamo i due triangoli di vertici BCD e B'C'D': i vertici corrispondenti B e B', C e C', D e D' sono allineati col punto H e si ha $C'H/CH = B'H/BH = D'H/DH = 2$.

Si è stabilita una corrispondenza fra i triangoli T1 e T3 che si chiama **omotetia**.

I triangoli T1 e T4 hanno gli angoli uguali e i lati in proporzione, ma non hanno i vertici corrispondenti allineati con un centro; sono tra loro in una relazione di “similitudine”.

La similitudine comprende come caso particolare l'omotetia; tutte e due le relazioni conservano la forma delle figure, che possono essere considerate l'una l'ingrandimento, di un fattore r , dell'altra.

Nel seguito vedremo come queste due relazioni siano legate ad ombre di poligoni.

Ombre e omotetia

Nella figura 10 sottostante, il triangolo ABC è ottenuto proiettando i vertici M,N e P dal punto V e, a partire da A, mandando le parallele ai lati MN, NP, PA.

I due triangoli sono “simili”: hanno angoli corrispondenti uguali e conservano la proporzione fra i lati. Possiamo dire che uno è l'ingrandimento dell'altro e il fattore di ingrandimento è il rapporto fra le distanze di una coppia di vertici corrispondenti dal centro di proiezione V.

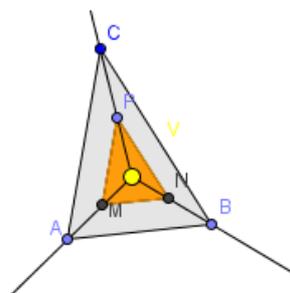


Figura 10

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mX8XN7kdZ>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[ombra-omotetia.ggb](#)]

Nel caso della figura, siccome $(VB)=2(VN)$, i lati del triangolo grande sono tutti il doppio di quelli del triangolo piccolo, perciò il perimetro grande è doppio di quello piccolo e l'area è il quadruplo.

Cosa lega la costruzione nel piano di figure simili con la formazione di ombre? Animiamo la figura precedente. Dobbiamo aprire il file ottenuto con GeoGebra (ombra-omotetia.ggb), cliccare sul punto V e, tenendo premuto il tasto sinistro del mouse, trascinarlo a piacere:

Il punto V compare come una piccola lampada gialla (sorgente luminosa puntiforme), che illumina il triangolo piccolo MNP, la cui ombra è il triangolo ABC. Muovendo la lampadina, si vede che l'ombra resta la stessa, i due triangoli restano simili, ma cambia il rapporto di similitudine.

È essenziale il fatto che l'ombra si produca su un piano parallelo a quello dell'oggetto. Solo in questo caso, qualunque sia la posizione della lampadina, l'ombra prodotta sarà simile all'oggetto che la produce, cioè una sarà l'ingrandimento (rimpicciolimento) dell'altra, senza distorsioni che ne alterino la "forma".

Nella figura 11 si vede come la sorgente puntiforme S, illuminando il rettangolo ABCD, produce come ombra il quadrilatero EFGH. Questo perché il piano del quadrilatero non è parallelo al piano del rettangolo. Si può animare la figura come spiegato precedentemente.

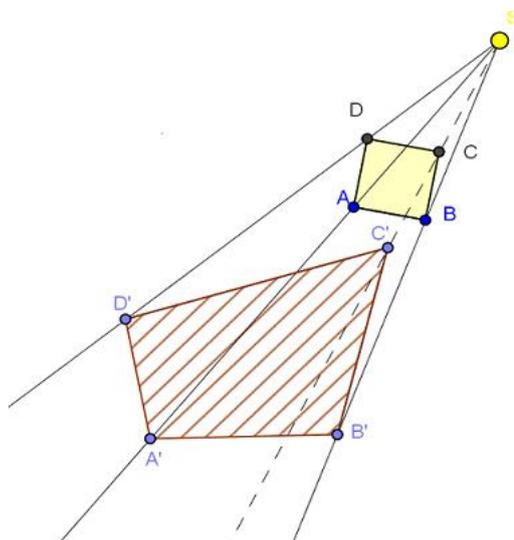
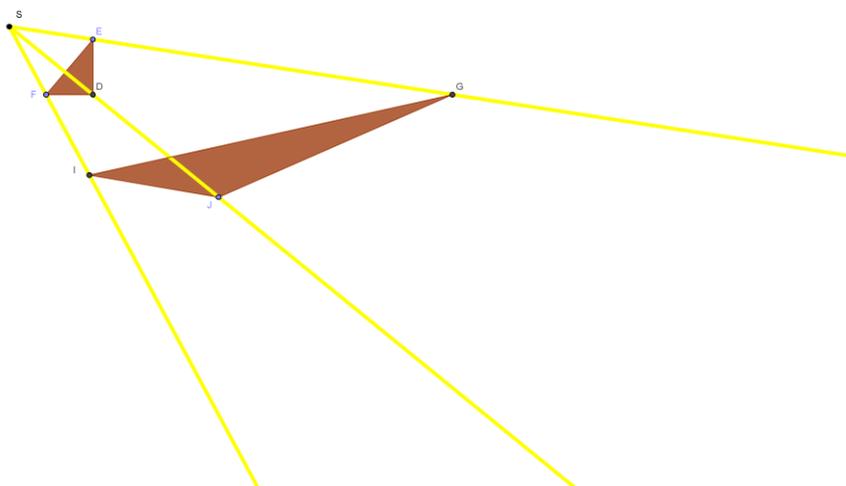


Figura 11

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mvheSDsYX>]
- ❖ Scarica il file geogebra [ombra-affinità-quadriati.ggb]

Si possono animare anche altre figure.



- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mWkZWNQuf>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[ombra-affinità-triangoli.ggb](http://ggbtu.be/ombra-affinita-triangoli.ggb)]

GeoGebra permette di costruire facilmente immagini significative della formazione di ombre da una sorgente puntiforme e di ragionare sulle proprietà geometriche delle relazioni fra oggetti (piani) e le loro ombre. La sistemazione di queste relazioni, specie negli aspetti quantitativi della relazione di similitudine, può essere affrontata verso la fase finale della scuola secondaria inferiore, ma alcuni aspetti qualitativi possono costituire motivo di studio “giocosso” fin dalla scuola dell’infanzia. È possibile procurarsi sorgenti luminose abbastanza intense da poter produrre ombre anche in ambienti non del tutto oscurati e abbastanza puntiformi da poter simulare in modo efficace la situazione ideale illustrata nei disegni.

È evidente che le **sorgenti puntiformi e le ombre da esse prodotte sono un'astrazione concettuale**, descritte benissimo dalla geometria delle proiezioni di una

figura piana da un punto, ma, a livello di scuola primaria, non sembra opportuno insistere sulla distinzione fra aspetto fisico e aspetto matematico.

D'altro canto il passaggio dalla complessità dei fenomeni alla semplificazione intelligente degli schemi di ragionamento è essenziale per chi comincia a formarsi una immagine scientifica di quello che osserva.

Meno problemi, da questo punto di vista, presenta lo studio delle ombre prodotte dalla luce del Sole. I fasci di luce hanno la stessa direzione e la stessa inclinazione (se pensiamo ai raggi, sono paralleli), quindi possiamo utilizzare la geometria delle rette parallele.

Partiamo dalla formazione dell'ombra di una figura piana su un piano non parallelo al piano che la contiene; in questo modo potremo ragionare sulle caratteristiche delle ombre prodotte dalla luce del Sole.

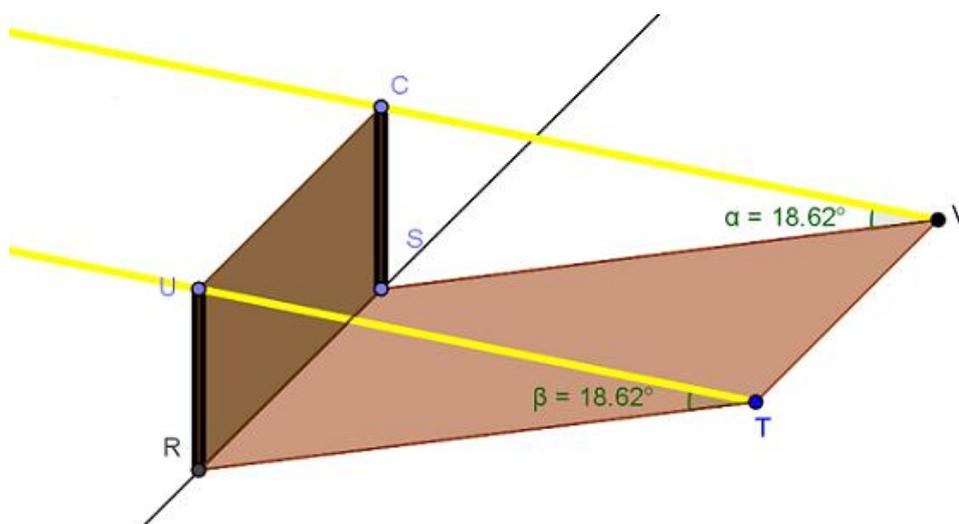


Figura 12

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mMd2ZR811>]
- ❖ Scarica il file geogebra [[ombre dal sole 1.ggb](#)]

Consideriamo la figura 12 e supponiamo che i segmenti (i pali) UR e CS abbiano la stessa lunghezza e siano tutti e due perpendicolari al piano dell'ombra.

Allora i triangoli URT e CSV sono congruenti (secondo criterio). Ne segue che i segmenti UT e CV hanno la stessa lunghezza; ma sono anche paralleli, quindi UCVT è un parallelogrammo (ha due lati opposti uguali e paralleli).

Infine notiamo che TV e RS sono uguali e paralleli, perché paralleli e uguali a CU.

Arriviamo con un po' di fatica alla conclusione che **l'ombra di un rettangolo è un parallelogrammo, qualche volta un rettangolo.**

Animando la figura ottenuta con GeoGebra ([ombre dal sole 1.ggb](#)) possiamo vedere come cambia l'ombra cambiando l'inclinazione dei raggi e la loro direzione. In particolare **potremo trovare quali sono le condizioni per cui l'ombra è uno stiramento del rettangolo iniziale.**

I bambini della primaria di primo grado, e forse anche quelli dell'infanzia, potrebbero riflettere più agevolmente su fenomeni che si svolgono in lunghi periodi di tempo, ma già scoprire che le ombre di tutti i bambini di una classe sono parallele potrebbe essere una conquista. Altrimenti, come si giustificerebbe l'affermazione che i raggi del Sole sono paralleli?

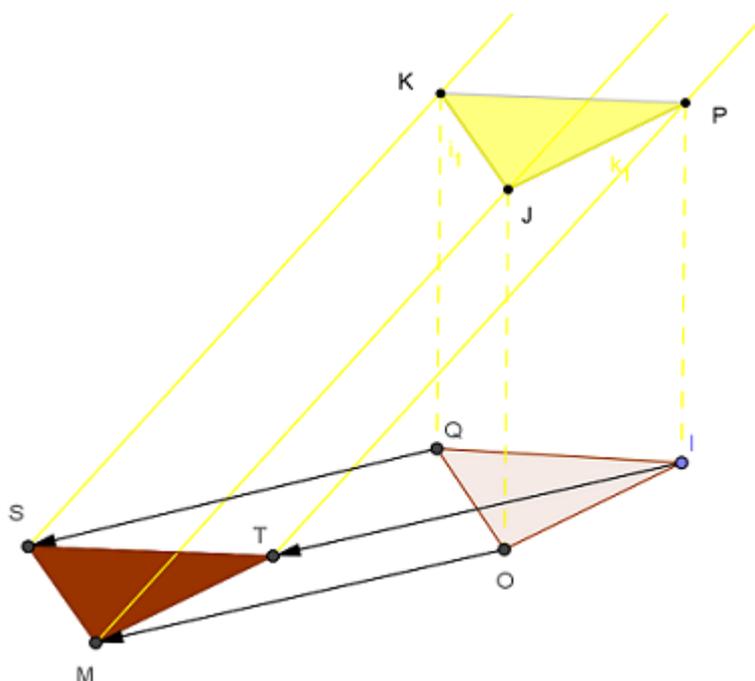


Figura 13

- ❖ Visualizza il foglio di lavoro geogebra [<http://ggbtu.be/mCwJrpWYb>]
- ❖ File geogebra [[ombre dal sole traslazioni.ggb](#)]

La figura 13 illustra la formazione dell'ombra del triangolo JPK su un piano parallelo; si vede che l'ombra MTS è una traslazione del triangolo di partenza, quindi i due sono congruenti (“uguali”, per i ragazzini):

Si vede così che le ombre prodotte dal Sole possono essere uguali agli oggetti che le formano, ma non sono mai un ingrandimento o un rimpicciolimento senza cambiamento di forma perché in generale non conservano gli angoli.

Le parole della geometria

Di seguito è proposto un elenco brevemente illustrato dei termini e dei concetti di geometria che intervengono in maniera essenziale quando si vogliono studiare le relazioni fra gli oggetti (piani) e le loro ombre, prodotte da sorgenti lontane (proiezione parallela) o da sorgenti puntiformi vicine (proiezione centrale).

È del tutto ovvio che una terminologia il più possibile esatta ed appropriata dovrebbe essere posseduta dagli insegnanti, ma non deve essere imposta agli allievi, soprattutto se molto giovani. Per questi la terminologia corretta deve costituire una conquista progressiva, che comincia nella scuola dell'infanzia e prosegue fino ai livelli più alti dell'istruzione.

Trasformazione geometrica: è un modo di collegare due figure appartenenti ad uno stesso piano o, più in generale, a due piani differenti. Il collegamento è ottenuto o con costruzioni geometriche o con regole di tipo algebrico fra le coordinate delle figure (funzioni). Costruzioni e funzioni devono garantire che tutti i punti di una figura corrispondano a punti dell'altra, e che ad un punto di una figura corrisponda uno ed un solo punto dell'altra; insomma, deve essere assicurata la possibilità di invertire il passaggio da una figura all'altra.

Punti uniti: quando l'immagine P' (il trasformato) di un punto P coincide con P stesso, allora P si dice “punto unito” rispetto alla trasformazione. Analogamente le “figure unite” sono quelle che corrispondono a se stesse.

Isometrie: sono le trasformazioni che conservano le distanze, cioè conservano le lunghezze di segmenti corrispondenti. Sono isometrie le traslazioni, le rotazioni, le simmetrie.

Le isometrie trasformano una figura in una figura congruente a quella di partenza.

Traslazioni: si ottengono spostando allo stesso modo tutti i punti di una figura. Una traslazione è caratterizzata da una direzione, da un verso e da una intensità (grandezza della traslazione). Si vede che, fra le altre proprietà, la traslazione:

- trasforma qualunque retta in una retta ad essa parallela (eventualmente coincidente)
- trasforma una figura in una figura congruente a quella di partenza, che è solo, appunto, traslata.

Rotazioni: fissato un centro C ed un angolo α , per ogni punto P della figura di partenza si costruisce il corrispondente P' centrando in C e costruendo un arco di raggio CP ed angolo al centro α . I punti corrispondenti P e P' sono gli estremi dell'arco. Proprietà delle rotazioni:

- il centro è l'unico punto che resta fermo (punto unito);
- una qualsiasi figura è trasformata in una figura congruente a quella di partenza.

Simmetria centrale: una simmetria di centro C si costruisce, per ogni punto P della figura di partenza, costruendo la retta per P e C e ribaltando P su questa retta, in modo da avere un punto P' che è allineato con C e con P , e tale che $P'C=PC$.

Proprietà fondamentali:

- il centro C è l'unico punto unito;
- tutte le rette passanti per C sono unite (come rette e non come singoli punti);
- se si esegue due volte consecutivamente, si torna ai punti di partenza (è involutoria);

- trasforma rette che non passano per il centro in rette parallele.

Simmetria assiale: una simmetria assiale rispetto ad una retta r si costruisce partendo da un punto P , mandando la perpendicolare s da P ad r , ed infine ribaltando P su s in modo da individuare il punto P' , trasformato di P . In breve, il segmento PP' dovrà avere come asse la retta r . Proprietà (ne citiamo solo alcune tra le molte):

- l'asse di simmetria è costituito da punti uniti;
- le rette perpendicolari all'asse sono unite, ma non costituite da punti uniti;
- le relazioni di perpendicolarità e di parallelismo sono conservate.

Trasformazioni che lasciano invariata la forma, ma cambiano le dimensioni:

Similitudini: due figure si corrispondono per una trasformazione di similitudine (sono figure simili) se conservano il rapporto fra le distanze di coppie di punti corrispondenti. Il rapporto, uguale per tutte le coppie, si chiama rapporto di similitudine. Proprietà della similitudine:

- trasforma segmenti in segmenti che hanno con i primi rapporto costante k ;
- trasforma rette in rette;
- trasforma angoli in angoli di uguale ampiezza, in particolare trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari e rette parallele in rette parallele;
- mantiene la forma, cioè manda, per esempio, circonferenze in circonferenze, quadrati in quadrati, etc.

Omotetie: sono particolari tipi di similitudine, nelle quali i segmenti corrispondenti sono allineati su una semiretta di origine O , che si chiama centro di omotetia. Proprietà fondamentali:

- trasforma una retta in una retta parallela;
- trasforma una figura in una figura simile.

Le omotetie costituiscono uno dei modi più semplici di costruire figure simili.

Affinità: trasformazioni che possono cambiare le forme e le dimensioni

Le affinità sono trasformazioni definite dal fatto che trasformano rette in rette. Proprietà:

- se tre punti A, B, e C sono allineati, anche i loro corrispondenti A', B' e C' sono allineati;
- a rette parallele corrispondono rette parallele, e a rette incidenti corrispondono rette incidenti;
- conservano il rapporto fra segmenti paralleli ; da questa proprietà segue che il punto di mezzo di un segmento corrisponde al punto di mezzo del segmento trasformato.

In generale la forma non è conservata: ad un rettangolo corrisponde un parallelogramma, e ad una circonferenza corrisponde una ellisse.

In generale le ampiezze degli angoli non sono conservate: se due rette sono perpendicolari, non è detto che lo siano le rette trasformate.

Sitografia

Per approfondimenti, tra i tanti che si possono reperire in rete:

- Antonella di Luggo “Applicazioni di geometria”- Federica web learning
<http://www.federica.unina.it/corsi/applicazioni-di-geometria-descrittiva-e-rilievo-architettura/>
- <http://descrittiva4.blogspot.it/> a cura di Fausto Baiocco

Per l'ombra della piramide:

- www.iapht.unito.it/scin/materiali/piramidi-e-Sole.pps
- http://www.edscuola.it/archivio/antologia/astronomia_in_rete.pdf
- <http://www.vialattea.net/eratostene/>

*Questo percorso didattico è stato realizzato nel 2014 da INDIRE con i fondi del Progetto **PON Educazione Scientifica**, codice **B-10-FSE-2010-4**, cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo. La grafica, i testi, le immagini e ogni altra informazione disponibile in qualunque formato sono utilizzabili a fini didattici e scientifici, purché non a scopo di lucro e sono protetti ai sensi della normativa in tema di opere dell'ingegno (legge 22 aprile 1941, n. 633).*