Il Calcolo Combinatorio in aiuto alla Probabilità

Giuseppe Anichini

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Pensava bensí che finalmente i birri che lo conoscevano, eran due soli, e che il nome non lo portava scritto in fronte; ma gli tornavano in mente certe storie che aveva sentite raccontare, di fuggitivi colti e scoperti per istrane **combinazioni**, *riconosciuti all' andare, all' aria sospettosa, ad altri segnali impensati: tutto gli faceva ombra.* *"I Promessi Sposi"*

Il Calcolo Combinatorio è presente, più o meno manifestamente, nella vita di tutti i giorni. Come esempio, anche per introdurre alcuni dei vocaboli (e dei concetti) di uso comune e che ci accompagneranno in queste pagine, abbiamo proposto una citazione, forse non usuale, tratta dalle parole del più grande prosatore italiano,

Qui, le *(innumerevoli ?)* preoccupazioni di Renzo che, dopo l'avventura passata nell'osteria, cerca di *prevedere* il suo (prossimo) futuro, coniugano felicemente un **inconscio contare** con una, seppur vaga, **valutazione delle probabilità** (di non essere catturato).

Il conteggio fa già da preludio alla quantificazione dell'incertezza.

Il verbo "combinare" (da cui "combinazione", "combinatorio", ...) viene presentato nei dizionari di lingua italiana come

mettere insieme secondo un criterio e per un determinato fine
(G. Devoto - G.C. Oli).

Etimologicamente il verbo proviene dal latino *cum + bini*, ovvero *insieme a due a due.*

In Matematica, nel Calcolo Combinatorio, il significato resterà essenzialmente invariato, al di là della (precisa) definizione che daremo più avanti.

A cosa serve il calcolo combinatorio ? In particolare, a cosa serve il calcolo combinatorio nelle valutazioni della Probabilità ?

La risposta è facile:

Il Calcolo combinatorio serve a contare (gli oggetti, i casi favorevoli di un esperimento, i risultati possibili di un evento, $\cdots$) possibilmente senza fare troppi conti.

Cerchiamo di dare una spiegazione a questa risposta, abbastanza paradossale (e provocatoria).

Sappiamo, anche in via intuitiva, che per valutare numericamente alcune probabilità, abbiamo spesso necessità di fare dei conteggi e che tali conteggi non sono sempre semplicissimi. Ad esempio c' è bisogno di "contare" per rispondere alle domande:

Esempio 1 *Ad Eugenio hanno detto che fare (almeno)* 12 *al Totocalcio è lo stesso che fare Zero. È verosimile una tale affermazione?*

Esempio 2 *Carlo si ricorda che il codice segreto del suo Bancomat è formato dai numeri* $1, 2, 3, 4, 5$ *ma non se ne ricorda l'ordine. Qual è la probabilità di prelevare i soldi sapendo che lo sportello del Bancomat permette solo* 2 *tentativi?*

Esempio 3 *Francesco, giovane giocatore di poker, si chiede spesso perché avere in mano un* **Full**, *ovvero* 3 *carte di un tipo (Asso, 2, ..., Re) e* 2 *di un secondo tipo (ovviamente diverso dal primo), sia vincente rispetto all'aver in mano un* **colore**, *ovvero* 5 *carte, non consecutive, dello stesso seme (Picche, Cuori, Quadri, Fiori).*

Nei casi precedenti è richiesto di *contare* i *casi favorevoli* e, per fare questo, dobbiamo preliminarmente saper contare tutti i *casi "possibili"*. Per evitare equivoci filosofici è bene chiarire subito che chiamiamo *possibili* i casi che noi, **sperimentatori e giudicanti**, valutiamo avere la stessa probabilità di verificarsi.

Nota: Le risposte ai problemi posti dagli esempi precedenti possono essere inserite nelle *Prove di verifica* dell'attività.

In questi contesti saper "contare" non è più il procedimento, semplice e automatico, che ciascuno di noi ha appreso nella prima classe della scuola elementare: si conta un oggetto per volta ..... finché non si sono contati tutti gli oggetti. Quando gli oggetti sono *molti* e, soprattutto, non sono tutti davanti ai nostri occhi, dobbiamo procedere in altro modo pur tenendo conto che si deve:

- contare ogni elemento dell'insieme
- non contare più di una volta lo "stesso" elemento.

Nota: abbiamo evidenziato (con le virgolette) la parola *stesso* nella riga precedente per sottolineare un fatto molto importante e non sempre elementare. Vediamo questo fatto con un esempio.

Esempio A: Dato l'insieme $\{a, b, c\}$, siamo certi che:

$\{a, c\} = \{a, c\}$ e che $\{a, a\} \neq \{a, b\}$ e che $\{a, b\} \neq \{a, c\}$,

ma cosa possiamo dire delle coppie $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$?

Se pensiamo a casi non astratti quali, ad esempio,

A: − a, b, c sono tre professori due dei quali esamineranno Annalisa;

B: − a, b, c sono i numeri telefonici di tre amici di Annalisa.

vediamo subito – ed Annalisa sarà d'accordo con noi – che, nel primo caso, si ha $\{a, b\} = \{b, a\}$ mentre, nel secondo, $\{a, b\} \neq \{b, a\}$.

Dunque dobbiamo anche fare attenzione a quando l'ordine è importante, cioè a quando le coppie formate dagli stessi elementi sono "diverse" ed a quando, invece, l'ordine non lo è (ed in tal caso le coppie $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ sono "uguali").

Ma questa differenza ce la può segnalare solo il contesto dell'esperimento. Ed è sempre il contesto sperimentale che ci dice se un elemento può essere "ripetuto" o no: ad esempio, giocando al Totocalcio è inevitabile ripetere almeno un elemento visto che disponiamo di 3 elementi $\{1, X, 2\}$ per riempire 13 colonne. Lo sperimentatore dovrà pertanto rendersi conto del contesto applicativo in cui opera e poi usare le tecniche combinatorie.

Il Calcolo Combinatorio potrà poi aiutarci a dire che, dopo che è stato chiarito il contesto – ordine sí ordine no, ripetizione sí ripetizione no –, quanti sono i casi (favorevoli o possibili) senza doverli contare ad uno ad uno.

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Si chiama così sicuramente in modo anche troppo vistoso, il seguente risultato che riassume in sé tutta l'essenza del calcolo combinatorio:

Principio fondamentale: sia A un esperimento che può essere realizzato in due tempi diversi: in un primo tempo si possono avere m possibili risultati, in un secondo tempo, **indipendentemente** dai risultati del primo, si possono avere n possibili risultati. Allora l'esperimento consta globalmente di $m \cdot n$ possibili risultati.

Vediamo alcune applicazioni che spiegano da sole il risultato enunciato.

Esercizio 1 *: Supponiamo vi siano* 3 *diverse strade per andare dalla città* A *alla città* B *e 5 diverse strade per andare dalla città* B *alla città* C*; quante strade diverse si possono percorrere per andare dalla città* A *alla città* C*?*

Risposta: Per il p.f. (principio fondamentale) si possono percorrere $3 \cdot 5 = 15$ diverse strade per andare da A a C.

Esercizio 2 *: Quanti sono i possibili risultati del lancio di* 6 *monete regolari?*

Risposta: Ogni risultato è una sestupla del tipo $TCCTTT$ (T sta per testa, C per croce). Ogni lancio ha due possibili esiti (T e C). Applicando il p. f., generalizzato ad un esperimento che viene realizzato in 6 tempi consecutivi, si ha pertanto: numero dei risultati $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$.

Nota: Dai due esempi presentati potremmo anche dire che il p. f. enunciato non è che una enunciazione teorica della prima regola di una $\cdots$ battaglia navale !

Altri strumenti molto utili per *contare* sono dati dal *linguaggio degli insiemi* e dai *grafi ad albero*; vediamone alcuni esempi.

Esempio 4 *Da un sondaggio è venuto fuori che, in un gruppo di* 45 *ragazzi,* 30 *di loro giocano a calcio (C),* 25 *a pallacanestro (P) e* 28 *praticano il nuoto (N). Inoltre* 16 *di loro giocano a calcio e pallacanestro,* 18 *fanno pallacanestro e nuoto e* 17 *calcio e nuoto. Sapendo infine che* 15 *di loro praticano tutti e tre gli sport, cosa si può dire ...... del sondaggista?*

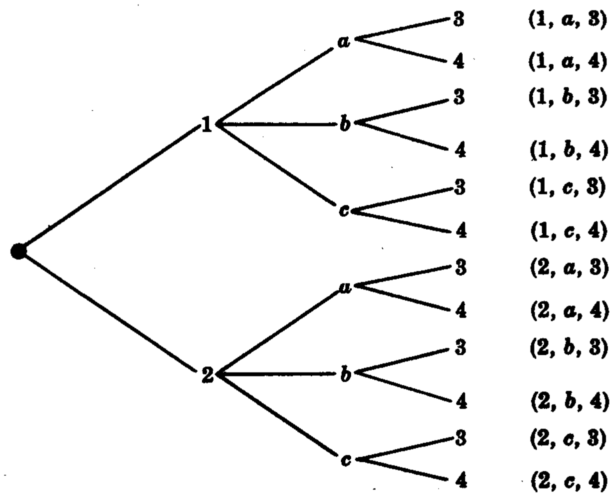
Risposta: Che non sa fare il proprio mestiere. Utilizziamo solo il linguaggio degli insiemi. Allora, dopo aver disegnato i diagrammi di Venn (con tre - patate che rappresentano i tre sport) ed indicando con $\mathcal{N}(\bullet)$ la numerosità dell'insieme $\bullet$, dovremmo avere:

$$\mathcal{N}(C)+\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(N)-\mathcal{N}(CP)-\mathcal{N}(CN)-\mathcal{N}(NP)+\mathcal{N}(CNP)=47,$$

contro il dato iniziale di 45 ragazzi nella classe.

Vediamo adesso una applicazione dei grafi ad albero.

Esempio 5 *Indicare con un grafo ad albero l'insieme dei casi possibili relativi agli eventi:*
$A = \{$ *Sono indeciso fra andare al cinema* (1) *o al mare* (2)$\}$*;*
$B = \{$ *Oggi pomeriggio uscirò con Anna (a) oppure Beatrice (b) oppure Carlotta (c)*$\}$;
$C = \{$ *Prima di uscire devo finire un lavoro. Uscirò alle tre* (3) *oppure alle quattro* (4)$\}$*.?*



La parte destra del grafo ad albero indica tutte le possibilità.
Una volta illustrati tutti i casi possibili non sarà difficile individuare, fra essi, i casi favorevoli al verificarsi dell'evento da noi preso in considerazione.

Esempio 6 *Tre carte sono pescate a caso, e senza rimettere la carta estratta nel mazzo, da un mazzo di* 52. *In quanti modi si possono pescare: a) una Cuori, una Picche, una Quadri; b) Due Picche ed una carta Rossa.*

Si può utilizzare un grafo ad albero per vedere che le risposte sono:

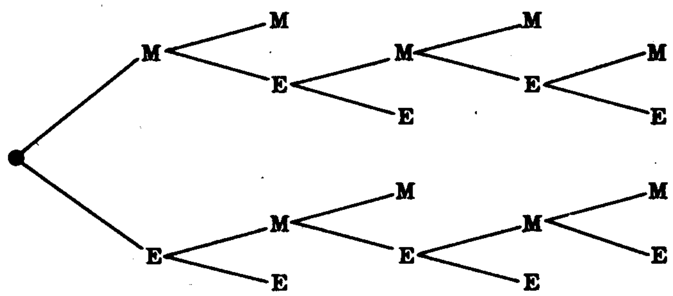
a): $13 \times 13 \times 13$.

b): $13 \times 12 \times 26$.

Presentiamo ancora un ulteriore esempio in cui la tecnica del grafo ad albero è particolarmente efficace:

Esempio 7 Risolvere con un grafo ad albero il seguente quesito:
Michela (M) ed Eugenio (E) partecipano ad un torneo di ping-pong. Il premio spetterà a chi vince 2 *partite consecutive o a chi, per primo, totalizzerà* 3 *vittorie.*

La parte destra del grafo ad albero indica i nomi dei possibili vincitori.



In casi come questo il grafo ad albero è lo strumento più semplice per avere una risposta (anche visivamente) convincente.

Iniziamo adesso ad affrontare gli argomenti del Calcolo Combinatorio, cercando di ricavare qualche formula iniziando col rispondere alla domanda:

In quanti modi si possono scegliere r oggetti da un insieme di N ?

Avendo di fronte N oggetti da cui dobbiamo sceglierne r, dobbiamo, nelle ipotesi del p. f., decidere il contesto, e quindi le modalità di scelta, di tali oggetti.

Pertanto, per rispondere correttamente dobbiamo *sapere* come “vogliamo“ gli r oggetti.

- Oggetti *ordinati* oppure oggetti *non ordinati* ?
- Oggetti *distinti* o oggetti *con ripetizione* ?

Siamo dunque di fronte (per il p. f. !) a quattro casi:

α– Nel caso di oggetti *ordinati* e *distinti* abbiamo:

Numero di modi diversi (di scegliere r oggetti fra N) =

$$= N(N-1)(N-2)\cdots(N-r+1)$$

essendo il primo “spazio“ occupato da uno qualsiasi degli N oggetti, il secondo “spazio“ da uno qualsiasi dei rimanenti $(N-1)$ oggetti e così via fino all'aver disposto tutti gli r oggetti.

Si parla allora di **disposizioni** semplici di N oggetti a gruppi di r.

Se gli oggetti da scegliere sono tutti, ovvero se $r = N$ abbiamo allora

$$N \times (N-1) \times (N-2)\cdots 2 \times 1 = N!$$

e si legge N *fattoriale.*

(In tal caso, invece che di Disposizioni si parla di **permutazioni.**)

Nota: Il numero $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ è un numero che cresce molto velocemente.

Ad esempio si ha:

$$5! = 120;\ \ 10! = 3\,628\,800;\ \ 15! = 1\,307\,674\,368\,000;\cdots$$

Per ovviare a questo inconveniente si utilizza molto spesso una formula di approssimazione, più facilmente gestibile dalle calcolatrici. La formula, nota come **formula di Stirling**, dice che:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}$$

Vediamo subito, dalla riga precedente, la bontà dell'approssimazione:

$$5! \approx 118.019; \;\; 10! \approx 3\,598\,600; \;\; 15! \approx 1.300430722 \times 10^{12}$$

e, in quest'ultimo caso, si ha un errore di circa lo 0.5%.

Ricordiamo anche che per convenzione, $0! = 1$, e le facili identità:

$$n! = n \times (n-1)!; \;\; \frac{n!}{k!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1).$$

β– Nel caso di oggetti *ordinati* e *con ripetizione* abbiamo:

Numero di modi diversi (di scegliere r oggetti fra N) =

$$= N \times N \times N \cdots \times N = N^r$$

essendo il primo "spazio" occupato da uno qualsiasi degli N oggetti, il secondo "spazio" sempre da uno qualsiasi degli N oggetti e così via fino all'aver scelto r oggetti.

Si parla allora di *disposizioni con ripetizione*.

γ– Nel caso di oggetti *non ordinati* e *distinti* abbiamo:

Numero di modi diversi (di scegliere r oggetti fra N) =

$$= \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-r+1)}{r!},$$

essendo $r!$ gli ordinamenti degli stessi r oggetti.

Il numero precedente può essere scritto anche come

$$\frac{N!}{r!(N-r)!} = \binom{N}{r}.$$

Esso è chiamato *coefficiente binomiale*, è spesso indicato con $C(N;r)$ ed è quello che viene usualmente utilizzato in molti giochi in quanto, giocando, ad esempio, al Lotto o al Poker, le regole del gioco prevedono *non ripetizioni* e *l'ordine* di estrazione dei numeri è del tutto ininfluente.

Si parla in tal caso di combinazioni semplici.

Si può ricordare un'altra formula, derivata dalle precedenti, spesso frequente nelle applicazioni. Si tratta della formula dei *coefficienti multinomiali* o delle *permutazioni con ripetizione*.

Consideriamo N oggetti, dei quali r_1 siano di uno stesso tipo, r_2 siano di uno stesso (diverso dal primo) tipo e così via fino ad r_k con $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = N$. Allora un gruppo ordinato di questi N oggetti si dice *coefficiente multinomiale* o *permutazione con ripetizione* ed è definito da $C(N; r_1, r_2, \cdots, r_k)$.

δ– Nel caso di oggetti *non ordinati* e *con ripetizione* abbiamo:

Numero di modi diversi (di scegliere r oggetti fra N) =

$$\binom{N+r-1}{r},$$

ragionando essenzialmente in modo analogo.

(Si parla in tal caso di *combinazioni con ripetizione*.)

Nota: Per quest'ultima formula esiste una dimostrazione pratica molto costruttiva (dovuta a W. Feller).

Supponiamo di avere $n = 4$ oggetti e cerchiamo di vedere in quanti modi diversi possono essere scelti in $k = 3$ gruppi (ovvero, come abbiamo detto, non ordinati e con eventuale ripetizione).

Rappresentiamo i 4 oggetti con asterischi ($*$) ed individuiamo i gruppi con lo spazio compreso fra due barrette $|\,|$. Con questa rappresentazione ci vorranno n barrette per indicare $(n-1)$ gruppi. Ad esempio $|***|\,|*|$ rappresenta la distribuzione $\{3, 0, 1\}$ dei 4 oggetti in 3 gruppi.

Allora, con questa avvertenza, vediamo che il numero delle combinazioni con ripetizione di 4 oggetti in 3 gruppi, sarà dato dalla "somma " di barrette (togliendone una) e di asterischi. Nel numero totale si può scegliere poi gli asterischi o le sbarrette (meno una) ovvero gli elementi o i gruppi.

Si ha dunque: *Combinazioni con ripetizione di* 4 *oggetti a gruppi di* $3: \ C(4+3-1, 4) = C(6, 3) = 20.$

Nota: Sui coefficienti binomiali torneremo nell'Appendice A

Queste sono in pratica tutte le formule del Calcolo Combinatorio necessarie per affrontare la maggior parte delle questioni di probabilità "simmetrica" come quelle legate ai più comuni giochi d'azzardo.

In questi casi infatti il probabilista-statistico-sperimentatore, dopo aver deciso quali sono i casi **equiprobabili**, non deve fare altro che "contare" quanti sono e, analogamente, contare i casi "favorevoli".

Esempio 8 : *In una scuola vi sono* 15 *insegnanti,* 5 *dei quali maschi. Si designa una commissione di lavoro. Qual è la probabilità che tale commissione sia fatta da:*

a) due uomini e due donne;

b) quattro uomini oppure quattro donne?

Risposta:

a): dai dati del problema non abbiamo nessun motivo di pensare che uno qualsiasi degli insegnanti sia "favorito" rispetto agli altri per andare in tale commissione. (Naturalmente se sapessimo qualcosa potremmo (anzi, dovremmo) utilizzare l'informazione !). Allora, osservando che non c'è ripetizione e che l'ordine non è influente, abbiamo un numero di casi possibili dato da $\binom{15}{4} = 1365$. Ragionando analogamente, il numero di modi favorevoli è dato dal *prodotto* (si usa il p.f. !) fra il numero di modi in cui si scelgono due uomini per il il numero di modi in cui si scelgono due donne ovvero dal prodotto $\binom{10}{2} \times \binom{5}{2} = 45 \times 10 = 450$. La probabilità richiesta è dunque:

$$\mathbb{P}_a = \frac{450}{1365} \approx 0.32967.$$

b): Il numero di casi possibili è sempre $\binom{15}{4}$. Adesso, il numero di casi favorevoli è dato dalla *somma* del numero di modi in cui si possono scegliere quattro uomini con il numero di modi in cui si possono scegliere quattro donne ovvero $\binom{10}{4} + \binom{5}{4} = 210 + 5 = 215$. La probabilità richiesta è dunque:

$$\mathbb{P}_b = \frac{215}{1365} \approx 0.15751.$$

Si ricorda ancora e comunque che in molti casi dobbiamo soltanto (nel senso che non si può fare altro) fare i conti.

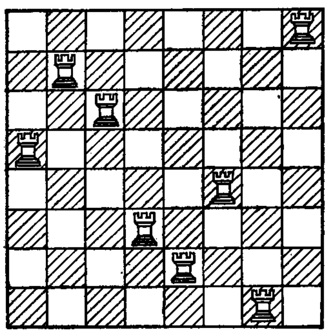
Vi sono cioè problemi di conteggio che bisogna affrontare direttamente, ovvero senza l'aiuto di formule. Ne è un esempio il seguente:

Esempio 9 *a) In quanti modi si possono mettere* 8 *Torri su una scacchiera in modo tale che ciascuna non possa "mangiare" un'altra ? b) In quanti modi si possono mettere un Re ed una Torre su una scacchiera in modo tale che il Re non possa "mangiare" la Torre e la Torre non possa dare scacco al Re ?*

a): a questa domanda si risponde facilmente con il Calcolo Combinatorio: solo una Torre può occupare ciascuna riga e colonna. Si hanno allora tutte le possibili permutazioni delle righe (o delle colonne) ovvero 8!

b): se non ci fossero limitazioni "scacchistiche" potremo sistemare i due pezzi in 64×63 modi. Dobbiamo allora contare quanti sono i casi non (scacchisticamente) accettabili. Distinguiamo le posizioni della Torre: possiamo porla in una casella d'angolo (in 4 modi), in una casella del bordo non d'angolo (in 24 modi) oppure in una casella non del bordo (negli altri 36 modi). Nel primo caso le caselle proibite per il Re sono 15 ($7 + 7$ sul bordo più quella subito sotto in diagonale); nel secondo caso, sempre contando nello stesso modo, si hanno 16 caselle proibite e nel terzo caso 18 (ovvero $7 + 7 + 4$). Dunque l e caselle proibite per il Re sono in tutto $15 \times 4 + 16 \times 24 + 18 \times 36 = 1092$ che vanno tolte dalle possibili 4032. Si hanno dunque 2940 possibilità.

Nella figura viene riprodotta una delle possibilità elencate nella parte a).



Appendice A

Quando abbiamo parlato di *combinazioni* abbiamo introdotto il simbolo $\binom{N}{k}$ (o anche $C(N,k)$) per indicare il numero di modi di scegliere k oggetti fra N senza ordine e senza ripetizione.

Tale simbolo, introdotto da Eulero (1707 - 1783), è chiamato *coefficiente binomiale* per motivi che andremo a vedere, e gode di importanti proprietà. Ne riassumiamo alcune:

- $\binom{N}{1} = N$
- $\binom{N}{0} = 1$
- $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}$
- $\binom{N}{k+1} = \frac{N-k}{k+1}\binom{N}{k}$
- $\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}$

Nota: La verifica delle precedenti proprietà può essere fatta facendo i conti, ovvero ricordando che $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$, oppure – e sarebbe preferibile – in modo del tutto combinatorio.

Facciamo vedere cosa intendiamo con l'ultima affermazione *dimostrando* la prima e l'ultima delle proprietà sopra ricordate.

Esempio 10 *: $\binom{N}{1} = N$ significa scegliere N oggetti da un gruppo di N: è ovvio che ciò può essere fatto in un solo modo.*

Esempio 11 *:* La formula $\binom{N+1}{k} = \binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}$ chiede: *In quanti modi si possono scegliere k oggetti da $N+1$? e risponde dicendo: nella somma dei modi in cui si possono scegliere k oggetti da N e dei modi in cui si possono scegliere $k-1$ oggetti da N. Come si fa per vedere ciò ?*

Supponiamo di avere una classe di N studenti con un ospite: Roberto Benigni. Nella classe ci sono dunque $N+1$ persone (N studenti più Benigni).

In tale situazione il numero di gruppi di k persone fra $N+1$ è dato dalla somma di due insiemi disgiunti: quelli di k studenti (senza Benigni) scelti fra N, più i gruppi di $k-1$ studenti (ovvero k persone con Benigni), scelti sempre fra gli N studenti.

I coefficienti binomiali si chiamano così perchè (assai) presenti nello sviluppo di un binomio.

Vediamone un esempio elementare prima di ricordare la teoria generale.

Esempio 12 *: Sviluppare* $(a+b)^3$*. Dall'algebra elementare si ha:* $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$*. Da dove provengono i coefficienti* 3 *dello sviluppo ? Per il primo di essi si ha:* $3a^2b = aab + aba + baa$*. La proprietà commutativa del prodotto ci ha permesso di compattare i termini. Ma in tal modo è come se avessi risposto alla domanda: In quanti modi posso "combinare" il prodotto di* 2 *volte* a *con* b *? La proprietà commutativa mi dice di trascurare l'ordine, non ci sono "ripetizioni" e dunque la risposta è* $\binom{3}{2}$ *ovvero* $C(3,2)$*.*

A questo punto appare chiara anche la relazione fra tali coefficienti ed il **Triangolo di Tartaglia**:

Ricordiamolo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

La quarta riga rappresenta lo sviluppo di $(a+b)^3$ come lo abbiamo visto sopra. In ogni riga, osservando per ogni termine i termini sovrastanti della riga precedente, possiamo rintracciare l'ultima proprietà dei coefficienti binomiali (quella che abbiamo dimostrato con l'aiuto di ... Roberto Benigni).

La formulazione più generale dello sviluppo del binomio è stata data da Newton (1642 - 1727):

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k} b^k$$

Riscriviamo adesso i coefficienti binomiali alla Tartaglia (o anche Pascal - Tartaglia):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{1}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{2} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{0} & & & & \\
 & & & \binom{3}{3} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{0} & & & \\
 & & \binom{4}{4} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{0} & & \\
 & \binom{5}{5} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{0} & \\
\binom{6}{6} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{0} \\
 & & & & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

Un'altra importante conseguenza delle proprietà del binomio è la seguente:

Esempio 13 *Quanti sono tutti i sottoinsiemi di un insieme di N elementi, comprendendo fra questi anche l'insieme vuoto e l'insieme stesso ?*

Si può rispondere a questa domanda osservando che i sottoinsieme di k elementi sono $\binom{N}{k}$. Dunque la risposta alla domanda è data da: $\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}$.

È adesso semplice osservare che quello precedente non è altro che lo sviluppo del binomio $(a+b)^n$ nel caso in cui $a = 1$, $b = 1$. Si ha dunque: $\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} = (1+1)^N = 2^N$.

Un uso molto proficuo dei coefficienti binomiali è, ovviamente, nella distribuzione binomiale (o di Bernoulli).

Vediamone brevemente un caso.

Esempio 14 *Qual è la probabilità di avere* 3 *Teste lanciando contemporaneamente* 4 *monete (che noi giudichiamo) perfette? (Oppure, equivalentemente, lanciando* 4 *volte una moneta perfetta ?)*

Risposta: Abbiamo, dalle ipotesi, $\mathbb{P}\{Testa\} = \mathbb{P}\{Croce\} = \frac{1}{2}$. Allora l'uso della distribuzione binomiale ci dice

$$\mathbb{P}\,\{\text{3 Teste su 4 lanci }\} \;=\binom{4}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^{4-3} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Alcuni riferimenti storici.

Fino all'introduzione del calcolo differenziale ed integrale come strumenti nell'ambito del Calcolo delle Probabilità, ovvero fino ai tempi di Leibniz (1646 - 1716), il Calcolo Combinatorio era praticamente l'unico strumento usato per affrontare i problemi di tipo probabilistico.

Ricordiamo alcuni momenti storici che hanno interessato il Calcolo Combinatorio:

- i numeri "triangolari" dei pitagorici, ovvero $1; 1+2=3; 1+2+3=6; \cdots; 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=$, — *come diremmo oggi*, — a $\binom{n+1}{2}$;
- la determinazione del numero di tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi (ovvero 2^n, come visto sopra), nota in India nel 200 a.C.;
- la determinazione delle combinazioni semplici, già nota in India mille anni fa;
- le tavole dei coefficienti binomiali, fino alla ottava potenza, sono state ritrovate in scritti cinesi risalenti al 1300;
- la relazione fra disposizioni e combinazioni semplici era conosciuta in scritti ebraici risalenti al 1321;
- le tavole dei coefficienti binomiali, fino a potenza 17, fu compilata da Michael Stifel nel 1544;
- vari risultati di tipo combinatorio, anche tecnicamente raffinati, sono infine presenti nella *Ars combinatoria*, famosa dissertazione di Leibniz.

A titolo di esempio vogliamo ricordarne una applicazione, forse la più nota, ovvero come Pascal ha risposto positivamente al problema dell'equa suddivisione delle poste, utilizzando considerazioni di tipo combinatorio, che hanno poi dato luogo al triangolo di Tartaglia - Pascal.

Ricordiamo anzitutto il problema dell'*equa suddivisione delle poste*.

Supponiamo che 2 *giocatori, ugualmente bravi, siano impegnati in un gioco che, per decisione comune, sarebbe terminato allorché uno dei due giocatori avesse raggiunto un numero N di vittorie e supponiamo altresì che* *tale gioco venisse interrotto, per motivi di forza maggiore, prima che uno dei due fosse riuscito a vincere le N partite necessarie per intascare il premio in palio per il vincitore.*

In quale proporzione doveva essere diviso in tal caso il premio, supponendo che il giocatore A avesse vinto **a** *partite e che il giocatore B ne avesse vinte* **b***?*

A questo problema si erano dedicati molti altri matematici del quindicesimo e sedicesimo secolo, fra i quali anche Luca Pacioli, Gerolamo Cardano, Niccolò Tartaglia.

La soluzione a questo problema fu data da Pierre de Fermat (1601 -1665) e da Blaise Pascal (1623 - 1662) in uno scambio epistolare del 1654 che è diventato così famoso nella letteratura scientifica da essere considerato come l'inizio "vero" del Calcolo delle Probabilità.

I due illustri matematici hanno affrontato il problema in modo diverso giungendo però alle stesse conclusioni risolutive. Il 29 luglio 1654 Pascal scriveva a Fermat: "Vedo che la verità è la stessa a Tolosa come a Parigi." *I due matematici avevano raggiunto l'accordo sui metodi per la risoluzione dei problemi di probabilità.*

In particolare, nel suo lavoro *Traité di triangle arithmétique*, Pascal, dopo aver descritto metodi di sviluppo di potenze del binomio e le proprietà dei coefficienti binomiali (usando fra l'altro la parola combinazione in termini moderni), dà una soluzione al problema dell'equa suddivisione delle poste.

Lo vogliamo ricordare descrivendolo in passi successivi:

1. si sommano i numeri delle partite che ad ogni giocatore mancano per vincere il premio;

2. si sceglie la riga del "triangolo" nella quale il numero dei termini è uguale alla somma ottenuta nel passo precedente;

3. partendo da 1 si sommano tanti termini quante sono le partite che al secondo giocatore mancano per vincere il premio;

4. si dà al primo giocatore la parte di premio proporzionale al numero appena trovato;

5. si ripete il procedimento per il secondo giocatore sommando adesso tanti termini quante sono le partite che mancano al primo giocatore per vincere il premio.

Facciamone un esempio pratico:

Esempio 15 *La partita a scacchi fra Alessandro e Bernardo, con un premio di* 50 000 *Euro, è sospesa allorché Alessandro sta vincendo per* 4 *partite a* 3*. Il premio spetta a chi arriva per primo a* 7 *partite. Come si divide il premio? E se Bernardo fosse in vantaggio per* 6 *a* 1*?*

Per il primo caso osserviamo che ad Alessandro mancano 3 partite per vincere, mentre a Bernardo ne mancano 4. Allora dobbiamo vedere la $7-$ma riga del triangolo di Tartaglia - Pascal. Tale riga è:

$$1, \qquad 6, \qquad 15, \qquad 20, \qquad 15, \qquad 6, \qquad 1$$

Pertanto la parte del premio spettante ad Alessandro è data da $1+6+15+20=42$ mentre la parte del premio spettante a Bernardo è data da $1+6+15=22$. In definitiva ad Alessandro spettano $\frac{42}{64}$ ovvero 32 815.5 Euro ed a Bernardo 17 187.5 (cioè i $\frac{22}{64}$).

Per la seconda parte della domanda si opera nello stesso modo:

ad Alessandro spetterà $\frac{1}{64}$ ovvero 781.25 Euro, mentre a Bernardo spetteranno 49 218.75 Euro, corrispondenti ai $\frac{63}{64}$ del premio.

Si può anche scrivere la formula generale nel modo seguente, supponendo che al giocatore A manchino a partite per vincere ed al giocatore B ne manchino b:

Il premio va diviso nella seguente proporzione:

Al giocatore A:

$$\binom{a+b-1}{0}+\binom{a+b-1}{1}+\binom{a+b-1}{2}+\cdots\binom{a+b-1}{b-1}$$

Al giocatore B:

$$\binom{a+b-1}{0}+\binom{a+b-1}{1}+\binom{a+b-1}{2}+\cdots\binom{a+b-1}{a-1}$$