Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
MIUR

Quanto sono reali i numeri trascendenti?

di M. Pedone, S. Rossetto, S. Zoccante

Area tematica

Numeri

Autori

Marcello Pedone, Silvano Rossetto, Sergio Zoccante

Ordine di scuola

Scuola secondaria di secondo grado - Secondo biennio - Proponibile al IV anno

Tempo medio per svolgere il percorso

6 - 8 ore

Sommario

Scheda generale 3
Introduzione 3
Introduzione 4
Attività 1 5
Attività 2 10
Attività 3 15
Attività 4 19
Indicazioni metodologiche 26
Spunti per approfondire 28
Elementi per prove di verifica 36
Risorse 40

Scheda generale

Licei

Obiettivi specifici di apprendimento

- Lo studio del numero π e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero *e*, permetterà di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. Attraverso una prima conoscenza del problema della formalizzazione dei numeri reali lo studente si introdurrà alla problematica dell'infinito matematico.

Istituti tecnici e professionali

Conoscenze

- Insieme dei numeri reali.
- Il numero π.

Limiti notevoli di successioni e di funzioni. Il numero *e*.

Introduzione

Attività 1

Premessa storica.

Esattamente, che tipo di numero è?

Attività 2 *I numeri Algebrici.*

La sezione aurea.

Il decagono regolare.

Altri numeri algebrici.

Attività 3 *Numeri Trascendenti. π* Approssimazioni razionali.

Approssimazioni irrazionali algebriche.

Attività 4 *Numeri Trascendenti. e* Un problema finanziario.

Quanto vale *e*?

Situazioni curiose.

Attività 1

Fase 1

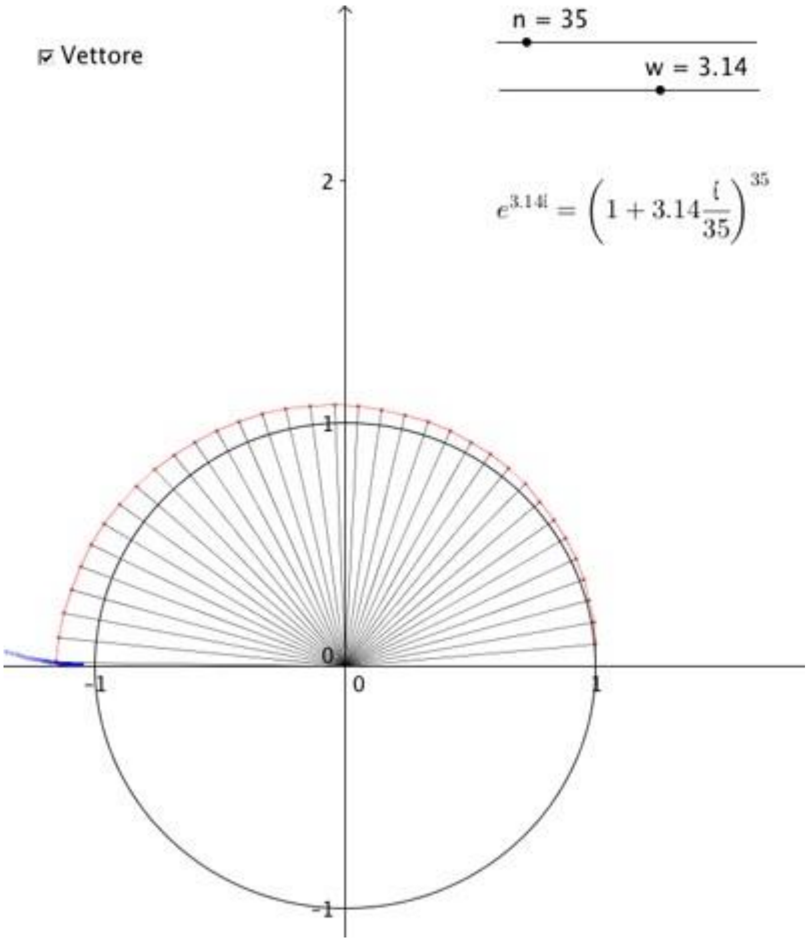
Premessa storica

La storia di π risale all'antichità; quella di e copre solo quattro secoli circa. Il numero π nasce da un problema geometrico: come trovare la lunghezza di una circonferenza e l'area di un cerchio. Le origini di e sembrano risalire al sedicesimo secolo, quando si notò che l'espressione $(1+1/n)^n$ che appare in un calcolo dell'interesse composto tende ad un certo valore – circa 2,71828 – all'aumentare di n. Così e fu il primo numero ad essere *definito* come limite di una successione (qualcuno potrebbe obiettare che anche π è definito così da Archimede, ma non è corretto: π è definito come rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro; Archimede usa le successioni di poligoni inscritti e circoscritti al cerchio per *calcolare* un valore approssimato del numero, non per *definirlo*).

Il numero e per un certo tempo fu considerato una specie di curiosità matematica: fu la quadratura dell'iperbole da parte di Gregoire de Saint-Vincent, quadratura ottenuta mediante la funzione logaritmo, a porre il numero e in primo piano nella matematica. Il passo successivo fu l'invenzione dell'analisi matematica, quando si scoprì che la funzione inversa del logaritmo naturale, la funzione esponenziale che in seguito sarà denotata come e^x, ha se stessa come funzione derivata. Da quel momento, il numero e e la funzione e^x divennero un cardine dell'analisi. Poi, a metà del secolo XVIII, Eulero permise alla variabile x di assumere valori anche nel campo complesso, aprendo la strada alla teoria delle funzioni di variabile complessa, che sarebbe divenuta uno dei settori trainanti della matematica del secolo XIX. Si deve sempre ad Eulero la bellissima formula

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che, inaspettatamente, lega in un'unica relazione i cinque numeri considerati i più importanti della matematica.



Scarica il file geogebra

Tuttavia, una domanda rimane ancora senza risposta: **esattamente, che tipo di numero è *e*?**

(Libera riscrittura da "*e The Story of a Number*", di Eli Maor, Princeton University Press)

Fase 2

Esattamente, che tipo di numero è?

Già dall'antichità erano noti i numeri naturali – i numeri per *contare* – e i numeri razionali – i numeri per *misurare*. Per i problemi del tempo, questi tipi di numeri erano adeguati alle necessità. Ma già dal V secolo a.C., con la scuola pitagorica, si era scoperto che alcuni problemi di misura imponevano di considerare, almeno dal punto di vista teorico, altri numeri, quali , o π che sembrava$\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{2}$n *essere razionali*. Per essere più precisi, i Greci dimostrarono

l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, ed allo stesso modo si può dimostrare l'irrazionalità di

$\sqrt[3]{2}$ (si veda l'attività m@t.abel *Il foglio A4*).

Per la matematica greca c'era però una profonda differenza tra questi due numeri irrazionali.

Il primo è *costruibile con riga e compasso*: $\sqrt{2}$ è il rapporto tra i lati di un quadrato di area 2 ed uno di area 1, e tale numero è costruibile con riga e compasso - basta notare che è la misura della diagonale di un quadrato di lato 1, e la costruzione di un quadrato di lato assegnato si effettua facilmente con rette e cerchi.

Il secondo, no: $\sqrt[3]{2}$ è il rapporto tra i lati di un cubo di volume 2 ed uno di volume 1, ed è risultato impossibile costruire questo numero con soli riga e compasso (chi è interessato veda l'approfondimento 1).

Per quanto riguarda π, gli antichi non riuscirono a stabilire se fosse o meno un numero irrazionale, né riuscirono a darne una costruzione con riga e compasso - cioè a costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza π. Quest'ultimo problema è noto come *problema della rettificazione della circonferenza* - si ricordi che π = (lunghezza della circonferenza)/(lunghezza del diametro)-, ed è equivalente al *problema della quadratura del cerchio*, ossia della costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio di raggio dato – in questo caso, π = (area del cerchio)/(quadrato del raggio).

Noi cataloghiamo ora entrambi i numeri $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ come *numeri algebrici*, ossia come numeri che sono *soluzione di qualche equazione polinomiale a coefficienti interi.* Ad esempio $\sqrt{2}$ è soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$, mentre $\sqrt[3]{2}$ è soluzione dell'equazione $x^3 - 2 = 0$. Sono algebrici anche tutti i numeri razionali, perché $x = r/s \in \boldsymbol{Q}$ è soluzione di $sx - r = 0$. È facile provare che anche numeri più complicati, ad esempio i radicali doppi, sono numeri algebrici. Sono algebrici anche tutti i numeri costruibili con riga e compasso, come ad esempio il numero aureo, come si vedrà nella *fase 2*. E sono algebrici anche i numeri complessi a coefficienti razionali, ad esempio i è una soluzione di $x2 + 1 = 0$. Si può infine provare che l'insieme dei numeri algebrici è un *corpo*, così come lo è l'insieme ***Q*** dei razionali.

L'insieme dei numeri algebrici è quindi un sovrainsieme molto ampio dei numeri razionali, e si può ipotizzare che ogni numero reale sia algebrico.
Ma così non è: nel 1844 il matematico francese Joseph Liouville dimostra che *esistono numeri reali non algebrici*. Uno degli esempi portati da Liouville è il numero definito da $\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\dots$, la cui rappresentazione decimale inizia così: 0,110001000000000000000000100…

Un altro esempio è 0,1234567891011121314…, le cui cifre decimali sono ottenute scrivendo in successione ordinata i numeri naturali. Questi numeri sono chiamati *trascendenti*, termine senza significati mistici: vuole solo indicare che tali numeri sono al di fuori del mondo dei numeri algebrici.

A questo punto, chiarito che esistono numeri reali trascendenti, si pone il problema di capire che cosa siano numeri di vecchia conoscenza come *π* ed *e*. Che questi fossero irrazionali era già stato dimostrato nel secolo precedente: Eulero aveva dimostrato l'irrazionalità di *e* e di *e*2 già nel 1737, e Lambert quella di *π* nel 1768. Lambert aveva dimostrato che le funzioni *ex* e tan *x non possono mai assumere valori razionali per x razionale diverso da* 0, e quindi, essendo tan *π*/4 = 1, aveva dedotto che *π*/4, e quindi anche *π*, sono irrazionali.

ornando alla trascendenza, Liouville stesso dimostrò che *e* non era soluzione di nessuna equazione di secondo grado a coefficienti interi, ma naturalmente ciò era molto lontano dall'obbiettivo: *un numero è trascendente se non è soluzione di nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi, di ogni grado possibile.*

Il risultato fu invece raggiunto da Hermite, altro matematico francese, nel 1873. Con un procedimento analogo, il tedesco Lindemann dimostrò, nel 1882, la trascendenza di *π*.

È interessante notare che per ottenere questo risultato sfruttò la formula di Eulero

eiπ + 1 = 0.

Si conclude così la lunga ricerca della natura di *π* e di *e*: i due numeri più famosi della matematica sono entrambi trascendenti. Si deve però osservare che forse questo risultato era *probabilisticamente* dovuto: nel 1874 Cantor aveva dimostrato che l'insieme dei numeri trascendenti era "molto più numeroso" dell'insieme dei numeri algebrici. Ma questa è un'altra storia.

Attività 2

Fase 1

Ricordiamo che un *numero algebrico* è un numero reale o complesso che è soluzione di un'equazione polinomiale della forma:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$ dove $n > 0$, ogni

a_i è un intero, e a_n è diverso da 0.

I coefficienti del polinomio ai possono essere anche numeri razionali: *infatti basta moltiplicare tutti i termini dell'equazione per un multiplo comune di tutti i denominatori dei coefficienti per ricondursi al caso intero.*

Tra i numeri algebrici, meritano un posto particolare i *numeri costruibili con riga e compasso*, per la loro importanza nella matematica greca. Con questa espressione sono indicati i numeri che sono lunghezze di segmenti costruiti mediante l'uso esclusivo di una riga non graduata e compasso. Abbiamo già visto che $\sqrt{2}$ è costruibile con riga e compasso (si veda l'attività m@t.abel *Numeri sulla retta*). Esaminiamo ora un altro caso importante.

La sezione aurea

Nel libro II degli *Elementi* di Euclide, Proposizione 11, viene riportato il seguente problema:

"come dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore".

Nella terminologia attuale, la *parte maggiore* è chiamata *parte aurea* o *sezione aurea* del segmento dato. In conclusione, la costruzione di Euclide insegna come determinare la sezione aurea di un segmento, avendo definito *la sezione aurea di un segmento come la parte media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente.*

Assumendo la lunghezza del segmento pari ad 1e indicando con x la sezione aurea si ha: $1 : x = x : (1-x)$

da cui $x^2 = 1^2 - x$ e infine $x^2 + x - 1 = 0$.
Abbiamo ottenuto un'*equazione polinomiale* di secondo grado a coefficienti interi: *la sezione aurea è quindi un numero algebrico*.

Ora è facile provare che *tale numero è irrazionale*. Infatti

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e, scartata la soluzione negativa, si ha

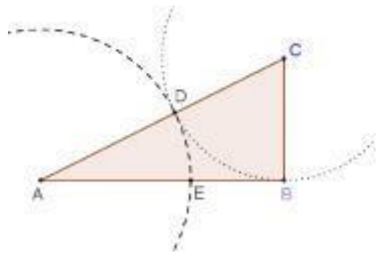
$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

dove $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$

L'irrazionalità della sezione aurea discende ora dall'irrazionalità di $\sqrt{5}$ (si veda l'attività [Il foglio A4], in cui è provata l'irrazionalità di $\sqrt{2}$).

Il rapporto $\frac{1}{x}$ $\left(= \frac{x}{1-x}\right)$ è detto *numero aureo* o *rapporto aureo*; poiché dividendo tutti i termini dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$ si ottiene $\frac{1}{x} = x+1$, il rapporto aureo vale $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ldots$

La sezione aurea è costruibile con riga e compasso. Dato il segmento *AB di lunghezza* 1 della figura, si



tratta di costruire un segmento lungo $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Si costruisca *CB* perpendicolare ad *AB* e di lunghezza 1/2. Allora *AC*, ipotenusa del triangolo *ABC*, misura $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Consideriamo ora *CD* = 1/2. Allora il segmento *AD* misura $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e quindi *AE*, che è congruente ad *AD*, è la sezione aurea di *AB*.

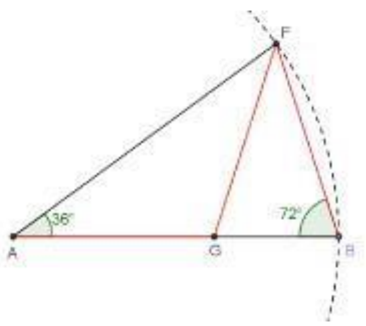
"La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la divisione di un segmento secondo il rapporto tra media ed estrema parte. Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d'oro, e definire il secondo una pietra preziosa."

Keplero, l'ultimo dei Pitagorici.

Fase 2

Il decagono regolare

Il rapporto aureo si ritrova nella costruzione del decagono e del pentagono regolari.

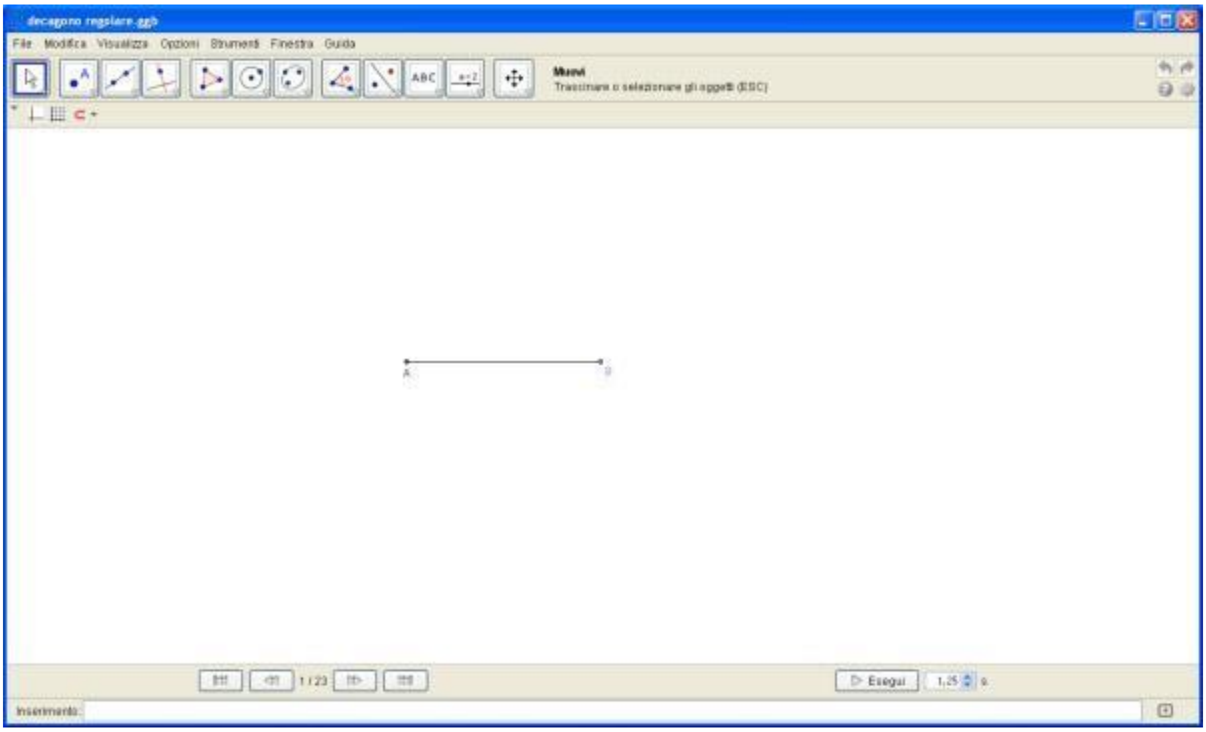


L'insegnante fa osservare alla classe le relazioni tra gli angoli di uno dei triangoli isosceli che si ottengono congiungendo il centro di un *decagono regolare* con i vertici (si veda la figura).

Si consideri la bisettrice dell'angolo in F: intersecherà il lato opposto nel punto G, formando due triangoli isosceli, uno dei quali (FGB) è simile al triangolo di partenza. Si può quindi impostare la seguente proporzione:

$$AB : FB = FB : GB.$$

E tale proporzione significa che AG (= FB) è la sezione aurea di AB. Il decagono regolare si può quindi costruire a partire dal raggio mediante la costruzione vista nella fase precedente.



[Scarica il file geogebra]

Fase 3

Altri numeri algebrici

La classe probabilmente ha già avuto modo di incontrare dei *radicali doppi*. Può essere interessante far notare come questi numeri siano tutti algebrici, se i radicali sono a coefficienti algebrici. Si proponga alla classe quale esempio il seguente numero: $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Come mostrare la sua algebricità?

Posto x=$\sqrt{2+\sqrt{2}}$, lo si eleva al quadrato per eliminare la radice più esterna:

$$x^2 = 2+\sqrt{2}$$

Si isola quindi il radicale, ottenendo

$$x^2 - 2 = \sqrt{2}$$

ed infine, elevando una seconda volta al quadrato, si ottiene *l'equazione polinomiale* desiderata:

$$(x^2 - 2)^2 = 2.$$

Si potrebbe provare che i radicali doppi sono sempre costruibili con riga e compasso (ci limitiamo, naturalmente, a radicali quadratici a coefficienti razionali), ma *attenzione alle generalizzazioni*: tutti i numeri costruibili con riga e compasso sono algebrici, ma non tutti i numeri algebrici sono costruibili con riga e compasso. Chi è interessato può vedere l'approfondimento 1.

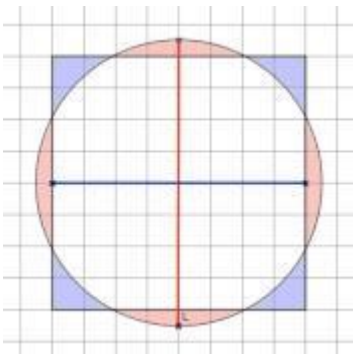
Fase 1

Approssimazioni razionali

Come osserva Villani (*Cominciamo da zero*), di un numero irrazionale non siamo in grado di descrivere lo sviluppo decimale: ci *accontentiamo*, per poter affermare di conoscerlo, di saperlo approssimare *bene quanto vogliamo*. Il tema dell'approssimazione dei numeri irrazionali è dunque molto importante ed esistono per esempio molti metodi di approssimazione di radici di equazioni polinomiali, ma tali metodi sono utili appunto per approssimare numeri irrazionali che siano soluzioni di equazioni polinomiali (algebrici): e nel caso di numeri trascendenti come procedere? Nelle attività 1 e 2 abbiamo discusso alcune classificazioni dei numeri irrazionali (numeri costruibili con riga e compasso, numeri algebrici) ed in particolare abbiamo osservato (nell'attività 1) che π ed *e* non sono algebrici (sono dunque trascendenti). Come fare a trovare approssimazioni per questi due numeri? Tratteremo il caso *e* nella attività 4 . Il problema è più delicato nel caso di π.

Nel corso della storia, sono state cercate approssimazioni di *p* con diversi metodi, ma è stato dimostrato che*p* è un numero trascendente solo alla fine del XIX secolo! Ripercorriamo alcuni dei metodi usati nelle diverse epoche.

Nell'antico Egitto i primi *geometri* (misuratori della terra) venivano anche chiamati arpedonapti (annodatori di corde), perché il loro strumento di lavoro era una corda. Una corda con 30 nodi (5, 12, 13) permette di tracciare un angolo retto; con la corda si tracciano (si tirano) rette e cerchi. Si pone presto il problema di valutare l'area del cerchio in relazione al lato del quadrato nel quale è inscritto.



Il papiro di Rhind, che è datato tra il 2000 e il 1800 a.C. e che fu portato a Londra da Henry Rhind nel 1858, riporta un metodo per calcolare una approssimazione dell'area del cerchio a partire dal suo diametro.

"Dato un cerchio, si divida il diametro in 9 parti e si moltiplichi per 8. Si ottiene il lato di un quadrato che a l'area prossima a quella del cerchio."

Partendo da un cerchio di raggio 9, e ponendo $\left(\frac{9}{2}\right)^2 \times \pi \cong 64$, si ha per *p* un valore di 64/ 20,25 ≈ 3,16.

In generale, si cercano due numeri interi *n* e *m* in modo che, dato il cerchio di diametro *n*, l'area del quadrato di lato *m* sia più vicina possibile all'area del cerchio.

L'approssimazione di *π* è data da $\frac{m^2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} = 4\left(\frac{m}{n}\right)^2$

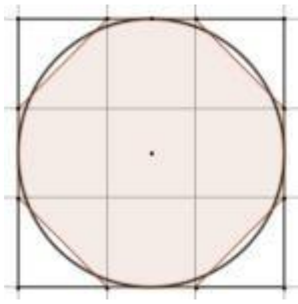
Nel caso del Papiro di Rhind si ha: $4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 4 \times 0{,}79 = 3{,}16$

Un valore ancora migliore si ottiene con i numeri *n* = 800, *m* = 709.

Si ha infatti: $4\left(\frac{709}{800}\right)^2 \cong 4 \times 0{,}785439 = 3{,}141756$, valore che fornisce correttamente le prime 3 cifre dopo la virgola di *π*.

La Bibbia indica 3 come approssimazione di π: (2Cr 4,2) "Fece la vasca di metallo fuso del diametro di *dieci* cubiti, rotonda, alta cinque cubiti; ci voleva una corda di *trenta* cubiti per cingerla."

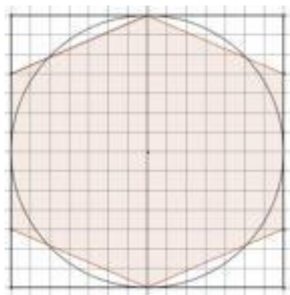
Ed ecco un'approssimazione usata dai **babilonesi**.



Un quadrato viene diviso in 3x3 quadrati uguali. I quattro quadrati ai vertici vengono divisi a metà. L'ottagono (non regolare) ha area che approssima, con errore di circa 1%, l'area del cerchio.

L'area dell'ottagono è 7/9 dell'area del quadrato circoscritto. Rispetto al raggio avremo quindi: $Area = 4\,R^2 \times \frac{7}{9} = R^2 \times \frac{28}{9}$ e quindi $\pi \cong \frac{28}{9} = 3 + \frac{1}{9} = 3{,}11\ldots$

Una seconda approssimazione, in uso al tempo di Archimede, si può ottenere dall'area dell'esagono in figura.



Dal quadrato di lato 14 vengono ritagliati ai vertici quattro i triangoli rettangoli di cateti 3x7.

L'area dell'esagono risultante approssima quella del cerchio inscritto nel quadrato dato.

Dato che l'area dell'esagono è $\pi \cong \frac{28}{9} = 3 + \frac{1}{9} = 3{,}11\ldots$ avremo $Area = 4\,R^2 \times \frac{154}{196} = R^2 \times \frac{22}{7}$ e quindi $\pi \cong \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3{,}142857\ldots$ valore corretto per le prime due cifre dopo la virgola.

Una semplice frazione, che approssima p con ben 6 cifre esatte dopo la virgola, viene proposta dal **cinese Zu Chongzhi** nel V secolo D.C. (450 circa). La frazione è $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$ (3,1415926 < π < 3,1415927).

Se ne osservi la curiosa regolarità che la fa ricordare facilmente: 113|355.

Ora sappiamo che nessuna rapporto tra numeri interi ha come valore π: π è un numero irrazionale.

Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

MIUR

Fase 2

Approssimazioni irrazionali algebriche

Ci sono però esempi di equazioni a coefficienti interi, trovate spesso a partire da costruzioni geometriche che non sono direttamente correlate a π, ma che hanno tra le proprie soluzioni una (più o meno buona) approssimazione di p:

$x^2=10$, $x=3.16227766$ $x^3=31$, $x=3.141380652$

$22\ x^4 - 2143 = 0$, dovuta al matematico Ramanujan Srinivasa (giovane matematico indiano morto a 33 anni nel 1920).

Una soluzione è: $x = 3.141592652..$ ($p = 3.141592653589793238…$): 8 cifre esatte dopo la virgola.

Per un esempio di costruzione geometrica che produce un'equazione a coefficienti interi che ha come soluzione un'ottima approssimazione di π si veda l'*approfondimento 3.*

Il valore di *p* può essere espresso come limite di successioni o con procedimenti *iterativi* che possono essere trovati nei riferimenti suggeriti nella bibliografia.

Uno di questi procedimenti, alternativo al metodo di Archimede dei poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio, viene proposto in *Spunti per altre attività per gli studenti 2* e si presta ad una semplice descrizione con l'uso di un foglio elettronico.

Attività 4

Fase 1 Un problema finanziario

Eli Maor nel libro già citato nota:

*"Nel corso della mia ricerca, un dato fu subito chiaro: il numero **e** era noto ai matematici almeno mezzo secolo prima dell'invenzione del calcolo (è già citato nella traduzione inglese di Edward Wright del lavoro di John Napier sui logaritmi, pubblicato nel 1618). Come può essere? Una possibile spiegazione è che il numero **e** comparve la prima volta in connessione con la formula dell'interesse composto*."

Il problema, a cui si fa riferimento e che poi è stato affrontato esplicitamente nel 1683 da Jacob Bernoulli, potrebbe essere nato da una situazione quale la seguente.

Un mercante (**M.**) intende depositare un certo capitale in una banca e tratta con il banchiere (**B**).

M.: "Ho sentito che nella vostra banca remunerate bene i depositi che noi mercanti facciamo presso di voi."

B.: "Sì, è così: noi, alla fine di ogni anno, calcoliamo l'interesse e lo sommiamo al capitale di inizio anno, e su questo nuovo capitale calcoliamo l'interesse l'anno successivo. È quella che noi, in gergo, chiamiamo *capitalizzazione composta*".

M.: "Interessante. Io vorrei depositare un capitale consistente, che ora non voglio rivelare, finché non abbiamo raggiunto un accordo. Dirò allora, giusto per capirci e per semplicità di calcolo, che il mio capitale C vale1."

B.: "Bene, d'accordo. Mi permetta, allora, di non dirle subito quale sarà il nostro tasso di interesse. Per raggiungere il nostro accordo, assumerò, per semplicità di calcolo, che il tasso annuo r valga 1. Che cosa vuole sapere?"

M.: "Così, con le nostre assunzioni, alla fine di un anno il deposito C diverrà la somma $S_1 = (C+rC) = C(1+r) = 2$, dopo 2 anni sarà $S_2 = S_1 + S_1 r = S_1 (1+r) = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2 = 4$, e così via."

B.: "Come vede, si tratta di una crescita geometrica, e non aritmetica come fanno altre banche."

M.: "Sì, certo, ma il mio capitale è veramente considerevole. E so che altre banche si stanno attrezzando come voi per gestire la capitalizzazione composta. Ad esempio la banca…"

B.: "Ho capito. E che ne dice se noi rivalutassimo il suo capitale 2 volte all'anno? Naturalmente l'interesse al semestre è la metà di quello annuo."

M.: "Così ora dopo un semestre avrei $C(1+r/2)$, a causa dell'interesse semestrale, e dopo un anno $C(1+r/2)(1+r/2) = C(1+r/2)^2 = (1+1/2)^2 = 2{,}25$.

È la stessa offerta della banca…"

B.: "Va bene, va bene: possiamo fare di meglio. Che ne dice di una rivalutazione mensile? In tal caso dopo un anno il capitale diventa $C(1+r/12)^{12} = (1+1/12)^{12} =$ …

Mi scusi, devo prendere l'abaco… ecco, uguale a 2,61. Guardi, non mi aspettavo una crescita così. Quasi non mi resta margine di guadagno. Prendere o lasciare. Se passo ad un periodo ancora più breve di sicuro avrò un capitale a fine anno maggiore di 3."

M.: "Beh, per crescere, è cresciuto, ma vi propongo questo patto: se considerando periodi ancora più brevi – diciamo un giorno, o un'ora o anche meno - il capitale a fine anno ammontasse a più di 3, io accetterò una rivalutazione trimestrale. Ci state?"

Come andrà a finire? In mancanza di un abaco potete usare una calcolatrice…

Fase 2

Quanto vale *e*?

l calcolo della situazione descritta precedentemente può essere illustrato dalla tabella seguente, tratta da e_interesse.xls

Periodo di rivalutazione	***n***	***r/n***	***Capitale finale***	***Capitale iniziale***	***tasso annuo***
anno	1	1,000000000	2,0000000	1	1
semestre	2	0,500000000	2,2500000		
trimestre	4	0,250000000	2,4414063		
mese	12	0,083333333	2,6130353		
settimana	52	0,019230769	2,6925970		
giorno	365	0,002739726	2,7145675		
ora	8760	0,000114155	2,7181267		
minuto	525600	0,000001903	2,7182792		

secondo	31536000	0,000000032	2,7182818		

Come si osserva, il valore sembra convergere ad un numero minore di 3. Questo numero è stato successivamente indicato, come detto, con la lettera *e*, ed è definito, forse primo numero nella storia della matematica, mediante un

limite: $e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Si tratta di una successione che converge piuttosto lentamente: si noti in tabella che per avere 7 cifre decimali esatte bisogna usare un valore di *n* dell'ordine di 10^7.

A questo punto dell'attività si può fare cenno come già dai tempi di Newton fosse però nota un'altra formula, che permette un calcolo decisamente più veloce, e che oltretutto è un caso particolare di una formula più generale, che permette il calcolo di e^x.

Tale formula, la cui giustificazione necessita di strumenti matematici usualmente affrontati nell'ultimo anno di scuola, è

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$.

Ponendo come caso particolare $x = 1$ si ha $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

ed usando i primi dieci termini si ottiene $e^1 = e \approx 2.7182818$, con 7 cifre decimali esatte.

Fase 3

Situazioni curiose

Il numero *e* interviene in modo naturale in molti altri contesti, in cui si presentano fenomeni di crescita o decrescita. Chi è interessato può consultare il già citato testo di E. Maor.

Presentiamo qui un problema sulla probabilità nel quale questo numero compare in modo inatteso.

Preso un numero naturale a caso da 0 a 9999999999 (numero di 10 cifre), qual è la probabilità che ci sia almeno una cifra i, con $1 \le i \le 10$, che si trova proprio nel posto i?

Stabiliamo di contare il posto delle cifre a partire da destra, cioè dalla posizione delle unità, e che il posto della cifra 0 sia la decima posizione (come nell'ordine del telefono). Ad esempio il numero 7271348314 ha le due cifre sottolineate nel posto giusto, mentre il numero 4962583217 non ne ha neanche una.

Potremmo fare una simulazione con un foglio elettronico come quello del file e_prob1.xls allegato.

La figura seguente mostra una esecuzione del foglio:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	1	2	0	8	0	2	0	7	0	4	0	3	0	9	0	8	0	6	0	1	1
2	2	1	0	10	0	10	0	2	1	4	0	7	0	9	0	10	0	6	0	1	0
3	3	1	0	9	0	9	0	2	0	7	0	9	0	8	0	2	0	5	0	5	0
4	4	10	0	3	0	2	0	3	0	3	0	10	0	4	1	9	0	2	0	1	0
5	5	3	0	10	0	3	0	1	0	3	0	2	0	7	0	7	0	2	0	3	0
6	6	2	0	6	1	9	0	9	0	10	0	7	0	8	0	2	0	2	0	8	0
7	7	4	0	8	0	7	1	9	0	4	0	2	0	5	0	8	0	4	0	9	0
8	8	4	0	2	0	7	0	5	0	1	0	1	0	3	0	1	0	7	0	9	0
9	9	1	0	7	0	1	0	5	0	5	0	2	0	10	0	10	0	8	0	9	1
10	10	5	0	8	0	10	1	8	0	10	1	2	0	1	0	4	0	5	0	3	0
11			0		1		1		1		1		0		1		0		0		1
12																					
13	Con 10 prove, gli esiti favorevoli sono:									6											

La colonna A riporta, per semplificare il calcolo, la posizione della casella. Le coppie di colonne da B-C a T-U riportano 10 esperimenti. Le colonne con sfondo colorato contengono il numero generato a caso tra 1 e 10, la cella a destra ha 1 se il numero della cella corrisponde alla posizione e 0 altrimenti.

Nella riga 11 c'è 1 se nella celle sovrastanti c'è almeno un 1, altrimenti 0. La casella 13 riporta il risultato dei 10 esperimenti. Ripetendo il calcolo più volte, si constata che su dieci prove si hanno in media tra 6 e 7 esiti positivi.

Possiamo estendere il problema ad un numero maggiore di caselle (o se preferiamo di numeri scritti in basi maggiori di dieci) riformulandolo nel modo seguente:

	A	B	C	D
1	Numero di caselle	Numero di lanci	Frequenza degli Esiti Favorevoli	Reciproco di 1-Cx
2	10	1000	65,70%	2,915451895
3	20		64,70%	2,83286119
4	30		62,10%	2,638522427
5	40		66,00%	2,941176471
6	50		63,70%	2,754820937
7	100		63,50%	2,739726027

date *n* caselle numerate da 1 a *n*, generati *n* numeri a caso da 1 a *n*, qual è la probabilità che almeno un numero si trovi nella casella corrispondente?

Il foglio e_prob2.xls può essere utile per eseguire delle simulazioni.

Nella figura viene mostrato una esecuzione del foglio.

Nella colonna A ci sono alcuni casi del numero di caselle. La cella B1 contiene il numero di esperimenti.

La colonna C riporta la frequenza relativa degli esiti positivi, cioè degli esperimenti con almeno una casella contenente il numero giusto.

La colonna D mostra il reciproco della frazione complementare a 1, rispetto a quella della colonna C.

L'osservazione di risultati ottenuti ripetendo più volte gli esperimenti induce a concludere che, con un numero alto di caselle, la probabilità richiesta dal problema tende a $1-1/e$.

Per giustificare questo risultato, possiamo calcolare la probabilità dell'evento contrario a quello proposto dal problema, e cioè:

date *n* caselle numerate, si inseriscano nelle caselle numeri generati a caso da 1 a *n*; qual è la probabilità che NESSUN numero corrisponda al numero della casella?

In ciascuna casella la probabilità che il numero sia diverso dal suo numero d'ordine è, evidentemente $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

La probabilità che tutti gli *n* numeri generati siano diversi dal numero d'ordine della rispettiva casella è quindi $P(n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Il file e_prob3.xls mostra il valore di $P(n)$ per alcuni valori di n.

Si ricorda che risulta $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, come l'alunno vedrà nel seguito dei suoi studi. Ciò dimostra il risultato riportato sopra.

Indicazioni metodologiche

Il tema è di interesse storico e permette di mettere a fuoco alcuni aspetti dei numeri reali, così come si sono sviluppati nel corso dei secoli.

Attività 1

In questa attività, attraverso i cenni storici, si propone di mostrare la significatività degli argomenti trattati, e come anche su tali questioni il *travaglio dei matematici* sia stato forte e duraturo (un segno di questo è anche nell'uso di termini come *irrazionali* e *trascendenti*). In particolare si dovrebbe cercare di giustificare l'importanza per le classificazioni trattate: numeri razionali/irrazionali, numeri costruibili/non costruibili con riga e compasso, numeri algebrici/non algebrici. Nella premessa (Fase 1) si sorvola su un punto delicato: definire e come limite di una successione crescente e limitata di razionali presume che tale limite esista. E' opportuno accennare al legame tra l'esistenza di tale limite e l'assioma di continuità, che caratterizza i numeri reali, e che garantisce che una successione limitata e crescente di razionali ammette limite. Si potrebbe riprendere il filo di questo discorso alla fine dell'attività, discutendo, anche attraverso cenni storici, "il problema" dell'allargamento dei numeri razionali e gli errori "logici" fatti da numerosi matematici anche famosi (vedi Cauchy).

Attività 2

Si trattano alcuni casi di numeri algebrici, in particolare la sezione aurea (con un cenno alla costruzione del decagono regolare) . Si tratta di numeri costruibili con riga e compasso. Ma tra i numeri algebrici compaiono anche altri numeri. L'idea di base che guida questa attività sta nell'imparare a riconoscere *operativamente* l'algebricità di alcuni numeri mediante la costruzione dell'equazione polinomiale di cui i numeri stessi sono soluzione.

Attività 3

L'attività è incentrata sull'approssimazione di numeri trascendenti (trattando il caso particolare di π). È opportuno discutere *perché* siamo interessati ad approssimare, ed arrivare a notare che dal punto di vista *pratico* della misura, del conteggio, potremmo limitarci ad usare solo numeri con rappresentazione decimale finita. Tutto questo è molto importante, forse è il cuore dell'attività stessa più che l'approssimazione in sé del caso particolare, perché porta a poter condividere il senso dell'introduzione dei numeri reali arrivando all'assioma di continuità.

Attività 4

Infine, si cercano le origini del numero e, e si impara a calcolarne alcune cifre. Si propongono poi alcune applicazioni curiose, per classi o studenti che abbiano conoscenze e interessi adeguati.

Spunti per approfondire

Spunti per approfondimenti disciplinari

1 - Relazione tra numeri costruibili con riga e compasso e numeri algebrici.

2 - Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt[3]{2}$.

3 - Una costruzione geometrica che approssima π.

Approfondimento 1

Perché i numeri costruibili con riga e compasso sono algebrici?

Prima di cominciare, dobbiamo riformulare la domanda dal punto di vista geometrico: perché i segmenti costruibili con riga e compasso hanno lunghezza algebrica?

Per rispondere alla domanda, dobbiamo pensare a come sono determinati i punti che individuano un segmento.

Assumiamo di avere all'inizio della costruzione solo punti con entrambe le coordinate razionali.

Si danno i casi seguenti:

- Mediante solo riga possiamo ottenere solo punti a coordinate ancora razionali. Infatti la riga individua una retta, e l'intersezione tra due rette determinate da punti razionali è ancora un punto razionale, come risulta passando alla geometria analitica, poiché il sistema formato dalle equazioni delle due rette, equazioni che risultano a coefficienti razionali, ammetterà soluzione razionale.

- Mediante riga e compasso: le intersezioni tra una retta individuata da punti razionali ed una circonferenza con centro e raggio razionale sono algebriche, poiché il sistema equazione della retta – equazione della circonferenza ammette come risolvente un'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono numeri algebrici (si utilizza al più la radice quadrata, oltre che le 4 operazioni).
- Mediante compasso e compasso: il sistema cerchio – cerchio è di quarto grado (anche se riducibile ad uno di secondo) e quindi le sue soluzioni sono algebriche.

Assumiamo ora di avere punti di coordinate algebriche.

Si danno di nuovo gli stessi casi di prima, riconducibili a sistemi di primo o secondo grado, le cui equazioni risolventi hanno soluzioni ancora algebriche.

Perché non tutti i numeri algebrici sono costruibili con riga e compasso? Abbiamo affermato, nell'attività 2, che $\sqrt[3]{2}$ è algebrico, poiché il numero è soluzione di $x^3 - 2 = 0$, ma non è costruibile con riga e compasso.

Possiamo giustificare questo fatto osservando che, in base all'analisi precedente, i numeri costruibili derivano da sistemi di primo e di secondo grado o di quarto grado. Usando sistemi di tale tipo non possiamo mai ottenere un'equazione di terzo grado.

Approfondimento 2

Per ogni $n \geq 2$ il polinomio $x^n - 2$ non ha nessuna radice razionale.

Dimostrazione per assurdo

Supponiamo per assurdo che abbia una radice x ε ***Q***, che possiamo esprimere sotto forma di frazione ridotta $\frac{a}{b}$. Sostituendo x nel polinomio e moltiplicando per b^n si ottiene: $a^n - 2\, b^n = 0$ cioè $a^n = 2\, b^n$.

Per l'unicità della fattorizzazione in ***Z***, il fattore primo 2 deve dividere a ossia $a = 2c$.
Dividendo per 2 i due membri si ottiene $2^{n-1}\, c^n = b^n$, con $n - 1 \geq 1$; allora il fattore primo 2 deve dividere b, in contraddizione con la scelta che $\frac{a}{b}$ sia frazione ridotta ai minimi termini.

Approfondimento 3

Una costruzione geometrica che approssima π.

Una costruzione molto semplice, che produce un'ottima approssimazione per *p*, è la seguente dovuta al gesuita polacco Adam Kochansky che l'ha descritta nel 1685. La riportiamo, in una forma equivalente, su un foglio quadrettato.
Si segnano i punti *A*, *B*, *C* e *D* su un foglio a quadri di lato unitario.
Si disegnano le circonferenze di centro *C* e di centro *D* di raggio unitario.
Si segna *E*, intersezione delle due circonferenze e si disegna il segmento *BE*.
Si segna *F* intersezione di *BE* con la quadrettatura.
Il segmento *AF* approssima *p* con un errore del 0,006% .
Vediamo perché *AB* è ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha lati di 2 e di $3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pertanto $AF = \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}}$ = 3,141533… che fornisce un valore corrispondente a *p* per le prime 4 cifre dopo la virgola.

La ricerca di una costruzione con riga e compasso, che produca esattamente *p*, ha tenuto impegnati i matematici per due millenni. Come nel caso della costruzione di Kochansky, spesso la costruzione non ha una giustificazione geometrica che faccia riferimento alla definizione di π, ma si guarda semplicemente all'equazione associata e alla approssimazione prodotta. A questo proposito si legga l'articolo di Martin Gardner riportato nella bibliografia. Solo nel 1882 Ferdinand von Lindemann dimostra che *nessuna* equazione a coefficienti interi può avere tra le sue soluzioni *p*: Ciò significa che *p* non è un numero algebrico – e di conseguenza non è costruibile con riga e compasso. *π* è un numero trascendente.

La costruzione di Kochansky, che approssima *p*, si può tradurre in una equazione a coefficienti interi nel modo che segue.

Poniamo *AF* = $x = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}}$. Con due elevamenti successivi al quadrato dei due membri dell'equazione si ottiene: $x^2 = \frac{40}{3} - \sqrt{12} \quad \rightarrow \quad 9 \cdot x^4 - 240 \cdot x^2 + 1588 = 0$

È questo un altro esempio, oltre a quelli mostrati nell'attività 3, di equazione a coefficienti interi che approssima π.

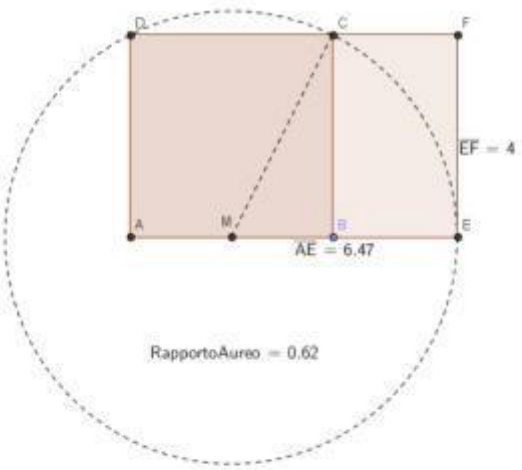
Spunti per altre attività con gli studenti

Costruzione di un triangolo aureo

La costruzione che segue è detta di Leon Battista Alberti (1400-1472). Dato un segmento *AB*, costruiamo un quadrato avente come lato il segmento *AB*. Consideriamo la circonferenza con il centro nel punto medio *M* del segmento *AB* e raggio uguale a *MC*. Indichiamo con *E* l'intersezione della circonferenza con il prolungamento del segmento *AB*.

Il segmento AB è la sezione aurea del segmento AE.

Il rettangolo *AEFD* è detto *rettangolo aureo*. In tale rettangolo il lato minore(*EF=AB*) è la sezione aurea del lato maggiore(*AE*).



Un successione storica convergente a *π*

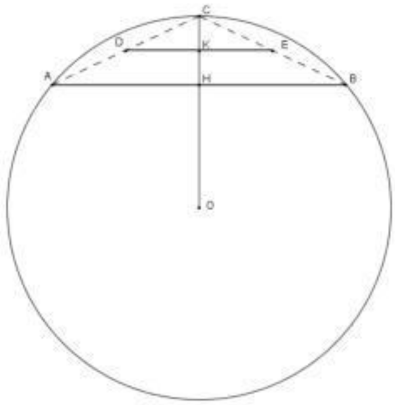
Un metodo per approssimare *p* attribuito a Nicolò Cusano (1401-1464), da un articolo di Pietro Canetta, pubblicato su "*L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*" del Centro Morin (1982 – Vol. 5 n.3-4)

Il metodo di approssimazione di *π*, dovuto ad Archimede, III sec. A.C., parte dagli esagoni inscritto e circoscritto ad una circonferenza e, mantenendo fissa la circonferenza, raddoppia via via il numero dei lati dei poligoni inscritto e circoscritto e ne calcola i perimetri.

Il metodo di Nicolò Cusano al contrario mantiene fisso il perimetro del poligono e calcola, al raddoppio del numero dei lati, i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta al poligono.

Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

MIUR



Siano AB il lato di un poligono regolare P_1 di perimetro dato p, $r_1 = OH$ il raggio della circonferenza inscritta e $R_1 = OA$ il raggio della circonferenza circoscritta al poligono.
Il poligono ha n lati e quindi $AB = p/n$.

Siano C il punto medio dell'arco AB, D il punto medio di AC e E il punto medio di BC: quindi DE=1/2AB può essere considerato come il lato di un poligono regolare P_2 con lo stesso perimetro ma con un numero doppio di lati.

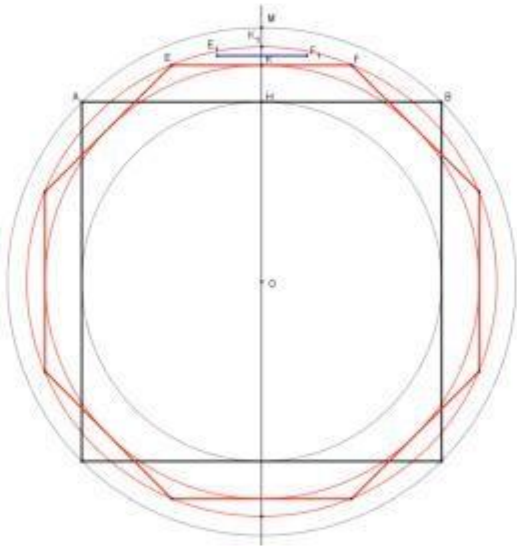
Il punto K è punto medio di HC e OK è il raggio della circonferenza inscritta al poligono $P2$ mentre OE è il raggio della circonferenza circoscritta a $P2$; O è centro del poligono $P2$ dato che l'angolo $D\hat{O}E = \frac{1}{2} A\hat{O}B$. Si ha perciò: $OK = r_2 = (OA + OH)/2 = (R_1 + r_1)/2$;

e inoltre, per il teorema di Euclide applicato al triangolo OEC, rettangolo in E, si ha: $OK : OE = OE : OC$ e quindi: $OE = R_2 = \sqrt{r_2 \cdot R_1}$

Ecco due semplici formule (media aritmetica e media geometrica) che mettono in relazione i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta della nostra successione.

Iniziamo da un quadrato di perimetro $p = 2$: il lato del quadrato è ½ e quindi i raggi iniziali sono: $r1 = 0,25$ e $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Possiamo utilizzare le due formule per generare due successioni dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta di poligoni che hanno tutti lo stesso perimetro p=2 e raddoppiano ad ogni passo il numero di lati. Le due successioni dei raggi convergono al raggio della circonferenza di lunghezza 2 e quindi a 1/π.



Nella figura accanto vengono riportati i primi due passi della successione dei poligoni, con le relative circonferenze inscritta e circoscritta. La figura è ottenuta dal file di geogebra allegato.

Si parte dal quadrato, di perimetro 2 e di lato *AB*. *H* è il punto medio di *AB* e *O* è il centro del quadrato.

Dato che il perimetro del quadrato è 2, i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta sono rispettivamente:

$$r_1 = \mathrm{OH} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{4}$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Si segnano i punti *E* ed *F* punti medi, rispettivamente, di *OA* e *OB*.

Il segmento *EF* è la metà di *AB* per il teorema di Talete.

Si disegna l'ottagono, in rosso nella figura, di lato *EF* e centro *O*, con le corrispondenti circonferenze inscritta e circoscritta. Il quadrato e l'ottagono hanno perimetri uguali.

Si può procedere in modo analogo per costruire l'esadecagono di lato E_1F_1 (in blu), punti medi di EK_1 ed FK_1.

Poiché il perimetro del poligono è costantemente 2, il valore di π è approssimato da:

$$\pi = \frac{2}{2 \times \frac{r+R}{2}} = \frac{2}{r+R}$$

La tabella seguente riporta il calcolo di una approssimazione di *p* ottenuta applicando il metodo di Cusano.

n	***r***	***R***	**2/(*r*+*R*)**
1	0,25000000000000	0,35355339059327	3,31370849898476
2	0,30177669529664	0,32664074121909	3,18259787807453
3	0,31420871825787	0,32036443096769	3,15172490742926
4	0,31728657461278	0,31882178866807	3,14411838524590
5	0,31805418164043	0,31843775386088	3,14222362994246
6	0,31824596775065	0,31834184636299	3,14175036916897
7	0,31829390705682	0,31831787580744	3,14163208070318
8	0,31830589143213	0,31831188356338	3,14160251025681
9	0,31830888749776	0,31831038552704	3,14159511774959
10	0,31830963651240	0,31831001101950	3,14159326962931
11	0,31830982376595	0,31830991739271	3,14159280759964
12	0,31830987057933	0,31830989398602	**3,1415926**9209225

Con poche iterazioni del calcolo si ottengono 7 cifre esatte dopo la virgola di π.

Come esercizio, si propone di modificare il foglio di calcolo allegato in modo da ottenere l'approssimazione di *p* a partire da un esagono. Le celle da modificare, naturalmente, sono solo quelle dei raggi della circonferenza inscritta e circoscritta dell'esagono di partenza.

Per ottenere la stessa precisione, cambia il numero di passi richiesti rispetto al caso del quadrato? Perché?

Elementi per prove di verifica

A - Determinare (se esiste) un numero a ε $\boldsymbol{Q}$ tale che il polinomio

$P_a(x) = x^2 + ax - 2$

1. non ammetta radici razionali. Si può dedurre che per tale valore di a il polinomio $P_a(x)$ è senza dubbio irriducibile?
2. ammetta radici razionali. Si può dedurre che per tale valore di a il polinomio $P_a(x)$ è senza dubbio riducibile?
3. ammetta due radici razionali.

B - Determinare (se esistono) due numeri a,b ε $\boldsymbol{Q}$ tale che il polinomio

$P_{a,b}(x) = x^2 + ax + b$

1. non ammetta radici razionali.
2. ammetta radici razionali.
3. ammetta due radici razionali.

C - Determinare (se esiste) un numero *a* ε ***Q*** tale che il polinomio

$P_a(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + a$

1. non ammetta radici razionali.
2. ammetta radici razionali.
3. ammetta tre radici razionali.

1) Alla scuola primaria una volta si imparavano i "numeri fissi": rapporto tra apotema e lato dei poligoni regolari.

Completa la seguente tabella:

Poligono regolare	***Approssimazione del numero fisso***	***Espressione algebrica del numero fisso***	***Razionale/algebrico/trascendente***
triangolo	0,288	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	Algebrico
quadrato	0,500		
pentagono	0,688		
esagono	0,866		

2) Consideriamo un dodecagono inscritto in una circonferenza di raggio unitario.

Si sa che il lato del decagono è la sezione aurea del raggio.

a) L’apotema del decagono è un numero razionale?

b) Come si può esprimere l’apotema del decagono?

3) La seguente affermazione è sbagliata *"Se due lati di un triangolo rettangolo hanno lunghezze razionali, la lunghezza del terzo lato deve necessariamente essere irrazionale".* Sai trovare un controesempio, cioè sai trovare un triangolo rettangolo in cui tutti e tre i lati hanno lunghezze razionali?

4) In un triangolo rettangolo due lati sono irrazionali: il terzo lato può essere razionale? Motiva la risposta.

5) Sai dimostrare che se due lati di un triangolo rettangolo hanno lunghezze algebriche, allora la lunghezza del terzo lato non può essere trascendente?

6) Operazioni tra numeri razionali (R), irrazionali algebrici (A), irrazionali trascendenti (T).

Completa la tabella seguente ricordando che, a volte, il risultato può essere di più di una tipologia, come nell'esempio.

a	***b***	***Operazione e tipologie del risultato***	***Motivazione***
A	A	*a* × *b* : A; R	*Se a e b sono algebrici, allora il risultato in alcuni casi è algebrico, in altri è razionale.* *Infatti: è algebrico* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ *mentre* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ *è razionale*
R	A	*a* × *b, a≠0*:	*Se il prodotto fosse razionale, (a ´ b) ´ 1/a sarebbe …*
T	R	*a* + *b* :	
T	T	*a* + *b* :	
A		$\sqrt{a}$	
T		a^2:	*Se il quadrato di un numero trascendente fosse algebrico, allora … (vedi riga precedente)*
A		a^2:	

7) L'equatore della terra misura $4 \cdot 10^7$ m. Se voglio la misura esatta al m del diametro (all'equatore) della terra, quante cifre decimali di π devo usare?

Risorse

Documentazione e materiali

File in formato .xls: e_interesse.xls

e_estrazioni.xls

e_induzione.xls

e_prob1.xls

e_prob2.xls

e_prob3.xls

File geogebra Decagono

i_e_pigreco.ggb

Bibliografia

Maor, E. *e The Story of a Number*, Princeton University Press.

Delahaye, D. J. *L'affascinante numero π*, Ghisetti e Corvi Editori.

Togliatti, E. *Storia di π,* Periodico di matematiche Vol XLVII , 1969.

Gardner, M. *Giochi ed enigmi matematici*, vol. 3, Sansoni.

Villani, V. [et al.] *Cominciamo da zero*. Pitagora Editrice, Bologna.

Villani, V. *Non solo calcoli*. Cap. 22, Springer, 2012.

Davis, P. J. *Il mondo dei grandi numeri*, Zanichelli, Bologna 1965.

Niven, I. *Numeri razionali e numeri irrazionali*, Zanichelli, Bologna 1965.