

L'induzione in matematica: *dagli anagrammi alla torre di Hanoi*

di M. Pedone, S. Rossetto, S. Zoccante

Area tematica

Dati e previsioni

Autori

Marcello Pedone, Silvano Rossetto, Sergio Zoccante

Ordine di scuola

Scuola secondaria di secondo grado - Secondo biennio

Tempo medio per svolgere il percorso

8 ore

Sommario

Scheda generale	3
Introduzione.....	10
Attività 1	11
Attività 2	21
Attività 3	29
Attività 4	40
Indicazioni metodologiche	50
Spunti per approfondire	53
Elementi per prove di verifica	60
Risorse	63

Scheda generale

Informazioni

Nucleo a cui si riferisce il percorso

Numeri

Autori

M. Pedone, S. Rossetto, S. Zoccante

Grado scolastico

Scuola secondaria di secondo grado - Il biennio (attività realizzabile anche al terzo anno)

Tempo medio per svolgere il percorso

8 ore

Nodi concettuali

- Il principio d'induzione e la struttura dei numeri naturali.
- Definizioni ricorsive.
- Dimostrazioni per induzione e confronto con altre forme di dimostrazione.
- Algoritmi ricorsivi

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 4 del 16/01/2012, Direttiva n. 5 del 16/01/2012) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Linee generali e competenze

Concetti e metodi che saranno obiettivi dello studio:
[...] una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara [...] della sua diversità con l'induzione fisica [...]

Istituti tecnici e professionali

Conoscenze

Il principio d'induzione.

Abilità

Ricavare e applicare le formule per la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica o geometrica.

Prove INVALSI

a.s. 2011/2012 - Domanda D11

Scuola Secondaria di secondo grado – Classe II

D11.

- a. Osserva e completa la seguente tabella.

n	$(n-1)n(n+1)$
2	$1 \times 2 \times 3$
3	$2 \times 3 \times 4$
4
5

- b. Giulia afferma: “Per ogni numero naturale n maggiore di 1, $(n-1)n(n+1)$ è divisibile per 6”. Spiega perché Giulia ha ragione.

.....

.....

.....

- c. Francesco afferma: “ $n^3 - n$ è uguale a $(n-1)n(n+1)$ ”. Dimostra che Francesco ha ragione.

.....

.....

.....

Soluzione INVALSI: D11a

n	$(n-1)n(n+1)$
2	1 x 2 x 3
3	2 x 3 x 4
4	3 x 4 x 5
5	4 x 5 x 6

D11b: la risposta è corretta se fa esplicito riferimento al fatto che il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 6, perché tra tre numeri naturali consecutivi c'è almeno un multiplo di 2 (numero pari) e c'è un multiplo di 3. Le risposte sono ovviamente accettabili anche se gli studenti usano “divisibile” al posto di “multiplo”.

D11c: $(n-1)n(n+1) = (n^2-n)(n+1) = n^3 + n^2 - n^2 - n = n^3 - n$

Oppure svolgono prima il prodotto notevole ottenendo $(n^2-1)n = n^3 - n$

Commento

La comprensione di una formula può essere aiutata dalla sua applicazione a qualche caso particolare. È ciò che ci si aspetta con il punto a. della domanda D11, posto come premessa alle due domande successive (D11b e D11c). La domanda D11b richiede di riconoscere, alla luce anche dell'esame di alcuni casi, che in tre numeri naturali consecutivi ci sono sempre un multiplo di 2 e un multiplo di 3 e che quindi il loro prodotto è sempre un multiplo di 6. La domanda D11c richiede di riconoscere l'equivalenza di due espressioni algebriche attraverso un semplice calcolo.

a.s. 2010/2011 - Domanda D14

Scuola secondaria di II grado - classe II

Nelle prove INVALSI per la scuola secondaria non ci sono domande sull'induzione matematica. Alcune domande tuttavia affrontano concetti che possono essere considerati prerequisiti diretti al tema proposto dall'unità.

D14. L'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?"

Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".

Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".

Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".

Chi ha ragione?

- A. Tutti e tre
- B. Solo Mario
- C. Solo Luisa
- D. Solo Giovanni

Soluzione INVALSI: A

Commento

Dal quaderno "Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 - Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di II grado"

Per rispondere, gli studenti avrebbero potuto: - utilizzare il calcolo letterale (un'addizione e una scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune) riconoscendo nell'espressione $3(2n + 3)$ un numero dispari; - individuare, nei tre numeri dati, tre numeri dispari consecutivi e, pensando alla struttura della semiretta dei numeri naturali, riconoscere che la somma di tre numeri dispari consecutivi è il triplo del secondo numero.

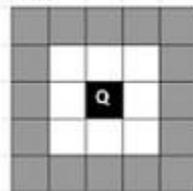
La percentuale di risposte corrette è di poco inferiore al 15%. L'opzione C è stata quella più scelta: non è strano, perché si vede immediatamente che è corretta. Infatti lavorando nel frame "pari-dispari" gli studenti possono concludere immediatamente che Luisa ha ragione, perché la somma di tre

numeri dispari è dispari. A questo punto molti studenti potrebbero avere pensato “poiché ho individuato una risposta corretta, le altre sono errate”. Una lettura più meditata avrebbe suggerito di verificare anche la correttezza dell’opzione A. Probabilmente questo equivoco si è andato ad aggiungere alla poca abitudine della prassi didattica italiana di usare l’algebra e il calcolo letterale come strumento di rappresentazione, di dimostrazione e, più in generale come strumento di pensiero; tutto ciò ha portato a una percentuale di risposte corrette molto bassa. Come per D4, anche in questo caso si poteva esplorare il problema assegnando a n i valori successivi 0, 1, 2, ...

a.s. 2012/2013 - Domanda D24

Scuola secondaria di II grado - classe II

D24. Al centro della figura c'è un quadrato nero Q. Il quadrato è circondato da una prima cornice bianca formata da 8 quadrati tutti uguali a Q e da una seconda cornice grigia. Immagina che la figura si estenda con successive cornici (terza, quarta, ecc.) sempre formate da quadrati tutti uguali a Q.



a. Quanti sono i quadrati della quarta cornice?

Risposta:

b. Se si continua a estendere la figura nello stesso modo, è possibile ottenere una cornice formata da 70 quadrati tutti uguali a Q? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

È possibile ottenere una cornice di 70 quadrati perché

.....
.....

Non è possibile ottenere una cornice di 70 quadrati perché

.....
.....

Soluzione INVALSI: D24a: 32D24b: Sono accettabili tutte le risposte che fanno riferimento al fatto che il numero di quadrati è uguale a $8n$ dove n è il numero d'ordine della cornice oppure che 70 non è un multiplo di 8 oppure risposte che fanno uso di formule algebriche equivalenti a $8n$. Accettabili anche risposte che calcolano i quadrati della ottava (64) e nona cornice (72) e che quindi concludano che non è possibile ottenere una cornice di 70 quadrati.

Commento

Ci si aspetta che l'allievo elenchi il numero dei quadretti delle diverse cornici in ordine successivo: la prima cornice 8 quadretti, la seconda 16, la terza 24, la quarta 32. L'allievo potrebbe anche osservare che il numero di quadretti del lato di ciascuna cornice è $2n + 1$, numero dispari; i quadretti della cornice sono invece $4((2n+1) - 1)$ e quindi $8n$. Osservando in modo diretto la sequenza dei numeri o con la formula più generale, l'alunno dovrebbe concludere che il numero dei quadretti delle cornici è sempre un multiplo di 8. Il quesito D24 richiede quindi di osservare casi particolari (iniziali) di una situazione per ricavarne una formula che permetta di rispondere a domande più generali.

Introduzione

Attività 1: La ricorsione come strumento per calcolare e per definire

Quanti sono gli anagrammi di una parola? Strategie risolutive e definizione ricorsiva del fattoriale. Altri esempi di definizioni e calcoli ricorsivi: potenze, la successione di Fibonacci, il MCD. Definizione di *espressione algebrica*.

Attività 2: Il principio di induzione

Enunciato e giustificazione del principio di induzione. Successioni aritmetiche e geometriche.

Attività 3: Il principio di induzione come strumento per dimostrare

Esempi, confronti e dimostrazioni mediante il principio di induzione. Situazioni in cui il principio di induzione non è applicabile.

Attività 4: Il principio di induzione come strumento per risolvere problemi

L'attività si conclude con l'applicazione del principio di induzione alla costruzione di algoritmi ricorsivi, con un esame dettagliato del procedimento risolutivo della *Torre di Hanoi* di Edouard Lucas.

Attività 1

La ricorsione come strumento per calcolare e per definire

Descrizione

Gli anagrammi sono un contesto ricco di spunti per molti temi: dal calcolo combinatorio ai grafi, dagli algoritmi alla ricorsione. In questo caso useremo gli *anagrammi di una parola le cui lettere siano tutte diverse fra loro* per giungere ad una definizione ricorsiva di fattoriale.

Fase 1

1 - Proponiamo alla classe un semplice problema: in quanti modi diversi si possono disporre, una di seguito all'altra, le tre lettere della parola "AMO" (naturalmente, ciascuna lettera deve comparire una e una sola volta)? Per rendere il problema più chiaro, possiamo riferirci agli *anagrammi* della parola AMO, cioè alle "parole" formate dalle stesse lettere, purché sia precisato che si accettano anche parole prive di senso; oppure alle possibili *password* formate dalle tre lettere in questione.

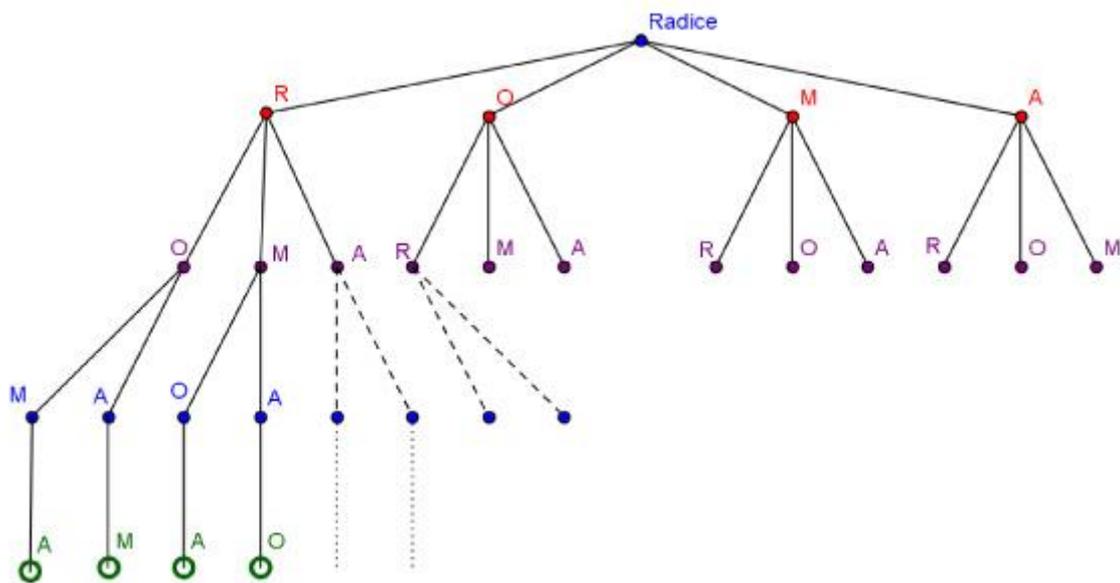
Gli alunni non avranno difficoltà a formarle tutte e concludere che sono 6.

2 – Il secondo esempio sarà su una sequenza di 4 lettere distinte: quanti sono gli anagrammi della parola ROMA?

Già in questo caso si pone il problema di cercare una *strategia* per formare tutti gli anagrammi senza dimenticarne nessuno. È opportuno discutere le strategie

proposte dagli studenti, lasciando loro il tempo di esplorare strade anche poco efficaci, prima di presentare le strategie migliori.

Una buona strategia sta nel costruire l'albero di tutti i possibili **anagrammi**: si parte da una radice e si tracciano tanti rami quante sono le lettere con cui gli anagrammi possono cominciare (nel nostro caso **4**, indicate in **rosso**). Ognuna delle lettere d'inizio è poi seguita da una delle altre tre lettere (in **viola**): si tracciano allora, per ognuno dei rami precedenti, **3** ulteriori rami. Si continua così, disegnando per ognuno dei rami precedenti altri **2** rami, uno per ogni terza lettera possibile (in **blu**); infine, resta una sola possibilità per la quarta lettera (in **verde**), e quindi si avrà **1** ramo finale.



[Scarica il file geogebra](#) ↓

[Visualizza l'animazione su GeogebraTube](#) 

L'albero nel suo complesso descrive la totalità degli anagrammi. L'albero diventa rapidamente grande e difficile da rappresentare già nel caso considerato (4 lettere); questo non ne diminuisce però l'utilità per comprendere il problema.

Gli anagrammi si leggono ora seguendo i rami a partire dalla radice: ad esempio, i primi quattro anagrammi sono ROMA, ROAM, RMOA, RMAO.

Un semplice calcolo ci mostra che i casi possibili sono in tutto $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Una seconda strategia, concettualmente non troppo diversa, permette di *contare* gli anagrammi senza *elencarli* tutti. Si tratta del *modello a celle* (o *a cassetti*). In questa rappresentazione, una *generica parola di n lettere* viene sostituita da una *n-pla di celle vuote*, per ognuna delle quali si individua il numero di elementi che la possono occupare (senza scriverli fisicamente); la cardinalità complessiva è data dal prodotto dei vari numeri.

Ad esempio, il modello a celle per gli anagrammi di ROMA è costituito da 4 celle:

- nella prima possiamo scegliere la lettera iniziale in **4** modi;
- nella seconda in **3** modi (dobbiamo infatti escludere la lettera iniziale);
- nella terza in **2**;
- nella quarta abbiamo **1** modo obbligato.

X	X	X	X
4	3	2	1

E quindi il numero di anagrammi possibili è $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Una terza strategia consiste nel partire dagli anagrammi già formati della parola AMO: in fondo, ROMA ha solo una lettera in più. Ogni anagramma di AMO può essere “espanso” per formare un anagramma di ROMA, con l’inserimento della lettera mancante (**R**): questa lettera può essere inserita in **4** posizioni diverse, ognuna delle quali dà origine a un anagramma diverso. Ad esempio, partendo da AMO si ottiene:

RAMO

ARMO

AMRO

AMOR

Questa tecnica ci consente non solo di provare che il numero di anagrammi di ROMA risulta essere **4** volte il numero di anagrammi di AMO ($4 \cdot 6 = 24$), ma anche, se necessario, di ottenere tutti gli anagrammi cercati.

3 – Terzo esempio: quanti sono gli anagrammi di AMORE?

Le strategie descritte si generalizzano rapidamente.

Ad esempio, il terzo metodo ci mostra che, per ciascuno degli anagrammi formati con le lettere di ROMA, la nuova lettera (**E**) ora può andare in **5** possibili posizioni.

Quindi il numero totale degli anagrammi è $5 \cdot 24 = 120$.

Nella discussione finale si deve porre in evidenza come ogni risultato si ricavi dal risultato precedente, eccetto che nel caso di 1 sola lettera.

È il momento per definire *formalmente* il *fattoriale di un numero naturale*:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{quando } n > 0$$

Inoltre si pone $0! = 1$. Alcuni esempi mostreranno la rapida crescita dei fattoriali all'aumentare di n . Ed emergerà la comodità di una definizione diversa, già suggerita nel terzo esempio.

Si arriva così ad una definizione di fattoriale 'ricorsiva', cioè si definisce esplicitamente il fattoriale per il primo numero naturale ($n = 1$, oppure anche $n =$

0, dato che $0!$ è stato definito sopra), e poi si definisce il fattoriale di un generico naturale n utilizzando il fattoriale del numero che lo precede, $n - 1$:

$$0! = 1 \quad (\text{oppure } 1! = 1, \text{ che è più intuitivo}) \quad (\text{PB}) \quad n! = n \cdot (n-1)! \text{ se } n > 0$$

(PI)

La prima formula è detta *passo base* (per questo abbiamo scritto PB). La seconda è detta *passo induttivo* (PI): il significato di $n!$ viene spiegato supponendo di conoscere già il significato di $(n-1)!$

Vale la pena di spiegare perché la definizione sia chiamata *ricorsiva* (o *per induzione*), e perché *non costituisca una definizione circolare*: per esempio, si definisce il significato di $4!$ supponendo di conoscere il significato di $3!$, ma, per definire $3!$, occorre conoscere $2!$ (e non $4!$ - in quest'ultimo caso cadremmo in un circolo vizioso). È bene far notare fin d'ora che questo modo di definire è *caratteristico* dei numeri naturali.

Se non è emerso spontaneamente in classe, è importante non perdere l'occasione di affrontare un problema: che cosa accade se le lettere con le quali formare gli anagrammi non fossero tutte diverse? Ci si convince senza difficoltà che il ragionamento precedente non funziona più: del resto, nel caso estremo in cui tutte le lettere sono uguali, abbiamo sempre un solo anagramma. Non è certo necessario contare in questa fase quanti sono gli anagrammi nel caso di lettere ripetute, ma è istruttivo riflettere su come sia facile non considerare tutti gli aspetti quando si è presi dalla "voglia di generalizzare"...

Aggiungiamo che l'argomento è interessante perché è correlato con i coefficienti delle potenze di un polinomio, oltre che del binomio: lo presentiamo, per chi è interessato, nell'approfondimento [Anagrammi con lettere ripetute](#) ↓.

Fase 2

Le definizioni e gli algoritmi di calcolo *ricorsivi* possono sembrare poco diffusi; in realtà, come vedremo nei prossimi esempi, sono molto frequenti, anche se spesso il loro carattere ricorsivo non è esplicito.

1. Potenze ad esponente naturale: possiamo far notare come di solito, nel calcolare la potenza di un numero, non otteniamo la potenza direttamente, ma dobbiamo passare attraverso la catena delle potenze precedenti. Ad esempio, se dobbiamo determinare il valore di 2^5 mentalmente (o per iscritto, se la base è maggiore), calcoleremo: 2 (= 2^1), 4 (= 2^2), 8 (= 2^3), 16 (= 2^4) e infine avremo $2^5 = 32$. Ciò significa che, senza rendercene conto, stiamo usando la proprietà: $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$. Invitiamo allora i nostri alunni a proporre una definizione ricorsiva. Dopo qualche tentativo, giungeremo a

$$a = 1 \quad (\text{oppure } a^1 = a, \text{ che è più intuitivo}) \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \text{se } n > 0.$$

Osservazione¹

A questo punto dell'attività si può proporre agli studenti di dare altre definizioni ricorsive, ad esempio quelle di successione aritmetica e geometrica.

Ricordiamo che le successioni aritmetiche sono caratterizzate dal fatto che è costante la *differenza* tra un termine e il precedente, per le geometriche è costante il *rapporto* tra un termine ed il precedente; in entrambi i casi, il primo termine può essere un numero qualsiasi.

¹ Prima o dopo giunge il momento di discutere con la classe la necessità di introdurre nella definizione il passo base: un caso specifico che si calcola direttamente, per avere un punto di partenza (e per evitare di incorrere in un regresso all'infinito). Sta all'insegnante trovare il momento opportuno per questa discussione.

Queste successioni sono quindi *naturalmente* definite in modo ricorsivo. Si chiede quindi agli studenti di formulare tali definizioni (che verranno riprese nell'attività 2 fase 2).

Quando si ritiene che gli studenti abbiano assimilato lo schema delle definizioni ricorsive, si può passare a considerare esempi significativi più complessi, quali i seguenti.

2. Successione di Fibonacci: probabilmente questa successione è già nota a qualche alunno, per la frequenza con cui compare nella divulgazione matematica, o per il suo legame con fenomeni di crescita. L'usuale descrizione a parola è già una definizione ricorsiva: *i primi due termini valgono 1, e ogni termine successivo è la somma dei due precedenti*. Quindi:

$$\text{Fib}(0) = 1; \text{Fib}(1) = 1;$$

$$\text{Fib}(n) = \text{Fib}(n-1) + \text{Fib}(n-2), \quad \text{se } n > 1.$$

Per esempio:

$$\text{Fib}(2) = \text{Fib}(1) + \text{Fib}(0) = 1+1 = 2;$$

$$\text{Fib}(3) = \text{Fib}(2) + \text{Fib}(1) = 2+1 = 3;$$

$$\text{Fib}(4) = \text{Fib}(3) + \text{Fib}(2) = 3+2 = 5;$$

Dal punto di vista della struttura, questa definizione è interessante perché il passo base comprende due casi. Non è il caso di affrontare un discorso generale sulla struttura di una corretta definizione ricorsiva; ma sarà bene spiegare da un punto operativo che, se si ponesse solo

$$\text{Fib}(0) = 1;$$

$$\text{Fib}(n) = \text{Fib}(n-1) + \text{Fib}(n-2), \quad \text{se } n > 0,$$

non saremmo in grado nemmeno di iniziare il calcolo per determinare i successivi valori della successione.

3. MCD tra due naturali: si tratta di un algoritmo molto importante, che può essere dato in forma ricorsiva.

L'idea guida è la seguente: se indichiamo con m e n i numeri naturali di cui vogliamo calcolare il MCD, e assumiamo $n > m$, un divisore comune d di m e n è anche un divisore di $n - m$. Infatti, se $m = d \cdot k$ e $n = d \cdot h$, allora $n - m = d \cdot h - d \cdot k = d \cdot (h - k)$, quindi d è un divisore di $n - m$. In modo analogo si dimostra che, viceversa, un divisore comune d di m e $n - m$ è anche un divisore di n .

In questo modo, il calcolo si semplifica, perché la coppia (m, n) viene sostituita dalla coppia $(m, n - m)$, dove uno di due elementi è minore del corrispondente nella prima coppia.

Quindi possiamo porre:

$\text{MCD}(m, n) = \text{MCD}(m, n - m)$ se $n > m$, $\text{MCD}(m, n) = \text{MCD}(n, m - n)$ altrimenti. (PI)

L'algoritmo ha termine quando *uno dei due numeri* diventa 0: allora *l'altro numero* è il MCD.

L'ultima condizione corrisponde al passo base: possiamo cioè scrivere:

$\text{MCD}(m, 0) = m$ e analogamente $\text{MCD}(0, n) = n$. (PB)

Probabilmente, le ultime uguaglianze risulteranno poco chiare a molti studenti, perché non siamo abituati a considerare il MCD fra 0 e un altro numero. E' bene allora riproporre vari esempi di calcolo del MCD fra due numeri, sottolineando il fatto che, appunto, l'algoritmo ha termine quando si ottiene uno 0. Dopo di che si tratta, in un certo senso, di "rovesciare" il procedimento per metterne in

evidenza la struttura induttiva: nel caso banale (uno dei due numeri è 0) troviamo direttamente il MCD; se i due numeri sono uguali allora $MCD(n, n) = MCD(n, n - n)$ e ci rifacciamo al caso precedente, ecc.

4. Ancora MCD tra due naturali. Se analizziamo il passo induttivo precedente, ci rendiamo conto che, se $n > m$, abbiamo una sottrazione ripetuta di m da n finché non otteniamo un numero minore di m stesso. Ad esempio, posto $m = 4$ e $n = 15$, avremo: $MCD(4,15) = MCD(4,11) = MCD(4,7) = MCD(4,3)$. E naturalmente 3 è il resto nella divisione di 15 per 4: con il linguaggio dell'aritmetica modulare, $3 = 15 \bmod 4$. Ciò suggerisce di perfezionare la definizione precedente come segue:

$MCD(m, 0) = m$ e $MCD(0, n) = n$ (PB) $MCD(m, n) = MCD(n, m \bmod n)$ (PI)

5. Un ultimo esempio, più difficile, anche perché non rientra immediatamente negli schemi precedenti, è la definizione di *espressione algebrica*. L'idea intuitiva è che un'espressione algebrica è una scrittura contenente numeri e lettere, collegate dalle 4 operazioni. Quest'idea si può esprimere in termini più rigorosi in modo induttivo, chiarendo il punto di partenza (un singolo numero o una singola lettera) e i passaggi leciti; ecco una possibile definizione, espressa in linguaggio naturale:

- qualsiasi numero o lettera è un'espressione;
- la somma, il prodotto, la differenza e il quoziente di 2 espressioni è un'espressione;
- nient'altro è un'espressione.

Quest'ultimo esempio va comunque presentato solo in termini intuitivi, perché non è affatto immediato riconoscere che rientra nello schema generale di definizione ricorsiva che abbiamo dato (per riportarci ai numeri naturali, potremmo far riferimento al "numero dei passi" necessari per costruire un'espressione algebrica, ma non vale assolutamente la pena parlarne).

L'insegnante può limitarsi a far notare che, in questa come in altre situazioni, si parte da oggetti "semplici" o atomici, e poi si introducono regole per costruire altri oggetti. E questo è, in sostanza, proprio l'idea del procedimento ricorsivo.

La prima riga della definizione è il passo base: si tratta di definire quali sono le espressioni "atomiche", le più semplici possibili, gli "atomi", con cui costruire le "molecole" più complesse.

La seconda riga costituisce il passo induttivo: permette di costruire espressioni più complesse a partire da espressioni più semplici (a rigore, nel caso del quoziente si deve porre la condizione che la seconda espressione sia diversa da 0).

L'ultima riga serve a ribadire che le uniche regole ammesse per generare un'espressione sono le precedenti.

Attività 2

Il principio di induzione

Descrizione

La possibilità di ragionare in modo induttivo, per calcolare e per definire come nei casi precedenti o per dimostrare come vedremo nel seguito, si basa su un “principio di induzione” che cominciò ad essere esplicitato e ad essere usato consapevolmente solo nel XVII secolo.

Fase 1

Il principio di induzione

Una formulazione del *principio di induzione* è la seguente.

Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà (o una formula) che dipende da un parametro n , dove n è un numero naturale.

Se

- $P(0)$ è vera,
- per ogni n il fatto che $P(n)$ sia vera implica che anche $P(n+1)$ è vera,

allora $P(n)$ è vera per ogni numero naturale n .

In certi casi la proprietà $P(n)$ ha senso solo per i numeri maggiori o uguali ad un assegnato numero n_0 , cioè per $n \geq n_0$ (per $n < n_0$ la proprietà non è definita, o

non è corretta, o comunque non ci interessa). In tal caso il principio di induzione va formulato in un modo lievemente diverso:

se

- $P(n_0)$ è vera,
- per ogni $n \geq n_0$ il fatto che $P(n)$ sia vera implica che anche $P(n+1)$ è vera,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$ in \mathbf{N} .

Ecco un esempio da proporre alla classe. Vogliamo provare che la somma dei primi n dispari è uguale ad n^2 , per ogni $n \geq 1$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot n - 1) = n^2.$$

All'inizio l'insegnante porrà attenzione alla scrittura dei numeri dispari: probabilmente gli studenti sanno che un numero dispari si può indicare con $2 \cdot n - 1$ ovvero con $2 \cdot n + 1$; ma è necessario esaminare qualche esempio per convincersi che $2 \cdot n - 1$ è l' n -simo numero dispari (se considero i primi 5 numeri dispari, il quinto è appunto $2 \cdot 5 - 1 = 9$).

DIMOSTRAZIONE

In questo caso:

- $P(n)$ è la formula: $1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot n - 1) = n^2$,
- n_0 è 1 (a rigore, la formula vale anche nel caso in cui $n = 0$, quando cioè non si considera alcun numero dispari, ma questo caso rischia di confondere le idee).

1. Devo provare che $P(1)$ è vera. Questo è banale, perché $P(1)$ significa che $1 = 1^2$.

2. Devo provare ora che, qualunque sia $n \geq 1$, se si accetta $P(n)$, allora se ne può dedurre $P(n+1)$.

E infatti, fissato un numero naturale k , suppongo vera $P(k)$, ossia suppongo che

$$1 + 3 + \dots + (2 \cdot k - 1) = k^2.$$

Assunta come ipotesi la precedente uguaglianza, devo ora provare che vale $P(k+1)$, ossia devo provare che vale l'uguaglianza

$$1 + 3 + \dots + (2 \cdot k - 1) + (2 \cdot k + 1) = (k + 1)^2 \quad (*)$$

Ma per ipotesi la somma dei primi k termini del primo membro è $P(k)$, e quindi (*) diventa:

$$k^2 + (2 \cdot k + 1) = (k + 1)^2$$

che è una nota identità.

Quindi $P(k+1)$ è dimostrata. E allora, *in base al principio di induzione*, si conclude che $P(k)$ è vera per ogni $k \geq 1$. C.V.D.

Il funzionamento

Come "funziona" una dimostrazione per induzione? Esaminiamo i singoli passi:

- Il *passo base* garantisce che

$$P(0) \quad \text{è vera.}$$

- Il *passo induttivo*, applicato al caso $n = 0$, garantisce che

$$P(0) \text{ implica } P(1).$$

Allora, la regola generale di inferenza *modus ponens*² garantisce che

$P(1)$ è vera.

- Il passo induttivo, applicato al caso $n = 1$, garantisce che

$P(1)$ implica $P(2)$.

Allora, la regola di inferenza *modus ponens* garantisce che $P(2)$ è vera.

- Poiché posso ripetere il procedimento tutte le volte che è necessario, dimostro la verità di $P(n)$ partendo dal valore iniziale 0, mediante un opportuno numero di queste iterazioni. *Quindi si arriva a $P(n)$ in un numero finito di passaggi*, per quanto grande sia n .

Posso perciò concludere che $P(n)$ vale per ogni n (oppure per ogni $n \geq n_0$). Si noti come tutta la costruzione si appoggi sul *passo base* e sulla ripetuta applicazione del *modus ponens* al passo induttivo. Va opportunamente posta attenzione all'affermazione “ P implica Q ”, che non presuppone la verità di P : si tratta solo di mostrare che, se si accetta P se ne deduce Q . In ogni caso, l'insegnante deve essere consapevole che una corretta comprensione e un uso consapevole del principio risultano molto delicati.

Il principio di induzione: assioma o teorema?

Abbiamo parlato, finora, di “principio” di induzione, ma Il termine *principio* (Villani, pag. 194) “è un termine ambiguo, usato talvolta come sinonimo di *assioma* (per esempio: *principio del terzo escluso*) tal'altra come sinonimo di

² Date le affermazioni A e B , la regola di inferenza *modus ponens* (MP) permette di affermare che « B » è conseguenza diretta di « A » e « A implica B ».

teorema (per esempio: *principio di identità dei polinomi...*). [...]Presumo che in passato questa ambiguità fosse voluta in quanto al momento della formulazione di tali ‘principi’ i matematici che li andavano enucleando erano ancora incerti circa la loro collocazione nella categoria degli assiomi o in quella dei teoremi.”

Se nel passato l’uso del termine “principio” era accettabile, in quanto per molta parte della matematica non venivano enunciati precisi assiomi, ora è preferibile ridurre l’uso di tale termine, o almeno precisare quando si tratta di assioma o di teorema. Ad esempio, il *principio di identità dei polinomi* è un teorema, nell’ambito dell’algebra. Naturalmente, una proposizione può essere un assioma in una data teoria assiomatica, un teorema in un’altra. È il caso del principio di induzione: nell’assiomatizzazione dei numeri naturali nota come *aritmetica di Peano* una versione di tale principio compare come assioma (il quinto); in altre assiomatizzazioni è una conseguenza logica di altri assiomi, e quindi un teorema.

Rinviamo ad un approfondimento a parte per altre informazioni [sul principio di induzione](#) .

Fase 2

Successioni aritmetiche e geometriche

Molti fenomeni di crescita o di decrescita (lineare ed esponenziale) sono descritti per mezzo di *successioni aritmetiche* e *geometriche*. Ricordiamo che le successioni aritmetiche sono caratterizzate dal fatto che è costante la *differenza* tra un termine e il precedente, per le geometriche è costante il *rapporto* tra un termine ed il precedente; in entrambi i casi, il primo termine può essere un numero qualsiasi. Queste successioni sono quindi *naturalmente* definite in modo ricorsivo:

<i>Successioni aritmetiche</i>	<i>Successioni geometriche</i>
a_0 numero fissato	a_0 numero fissato
$a_n = a_{n-1} + d$ se $n > 0$	$a_n = a_{n-1} \cdot q$ se $n > 0$

d e q sono chiamati *ragione* della successione³.

Si ricava facilmente che:

$$a_1 = a_0 + d,$$

$$a_2 = a_1 + d, \quad \text{da cui, sostituendo il valore precedente, } a_2 = a_0 + 2d,$$

$$a_3 = a_2 + d, \quad \text{da cui, sostituendo il valore precedente, } a_3 = a_0 + 3d,$$

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad \text{da cui, sostituendo il valore precedente, } a_n = a_0 + nd.$$

La formula $a_n = a_0 + nd$ permette di esprimere la successione aritmetica in *forma chiusa*: con essa possiamo calcolare direttamente l' n -simo termine senza dover calcolare quelli intermedi. Il termine *forma chiusa* è in contrapposizione a *forma ricorsiva*.

Si lascia agli studenti il compito di ricavare l'analogia forma chiusa per le successioni geometriche: $a_n = a_0 q^n$.

Qual è la somma s_n dei primi n termini di una successione?

³ Generalmente il primo indice è 0, ma talvolta si preferisce usare 1 come primo indice. La sostanza non cambia, ma ci possono essere differenze formali; il lettore ne tenga conto nelle formule seguenti.

1. Presentiamo un modo per calcolare la somma dei primi n termini di una successione aritmetica.

Ma prima possiamo proporre agli studenti di trovare la somma dei numeri da 1 a 1000 (per stimolarli, si può raccontare l'aneddoto di Gauss bambino, cui il maestro aveva dato il compito di sommare i numeri da 1 a 100). Affrontiamo quindi il caso generale.

Riportiamo nella prima riga di una tabella i valori ordinati dei primi n elementi della successione, e nella seconda gli stessi elementi, ma in ordine inverso:

a_0	$a_0 + d$...	$a_0 + (n - 2) \cdot d$	$a_0 + (n - 1) \cdot d$
$a_{n-1} = a_0 + (n - 1) \cdot d$	$a_{n-2} = a_0 + (n - 2) \cdot d$...	$a_0 + d$	a_0
$2a_0 + (n - 1) \cdot d$ $= a_0 + a_{n-1}$	$2a_0 + (n - 1) \cdot d$ $= a_0 + a_{n-1}$...	$2a_0 + (n - 1) \cdot d$ $= a_0 + a_{n-1}$	$2a_0 + (n - 1) \cdot d$ $= a_0 + a_{n-1}$

In ogni cella della terza riga sommiamo i valori delle due celle soprastanti: tale somma è costante e vale $a_0 + a_{n-1}$. Poiché le colonne sono n , la somma dei termini dell'ultima riga vale $n \cdot (a_0 + a_{n-1})$; e questa è anche la somma di tutti gli elementi delle prime due righe. Ora, ciascuno dei primi n termini della successione compare due volte (nella prima e nella seconda riga), da cui la conclusione:

$$s_n = n \cdot (a_0 + a_{n-1}) / 2.$$

Possiamo esprimere la formula nel modo seguente:

sommare n termini di una successione aritmetica equivale a sommare n volte la media aritmetica $(a_0 + a_{n-1})/2$ tra il primo e l'ultimo termine considerato.

2. La somma s_n dei primi n termini di una successione geometrica è $s_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ (si ricordi che gli n termini vanno da a_0 ad a_{n-1} ; qui naturalmente si suppone $q \neq 1$).

Proveremo la formula per induzione sul numero n .

PB. Se $n = 1$, la formula è vera: $s_0 = a_0 \frac{1 - q^1}{1 - q} = a_0$

PI. Assumiamo che la formula valga nel caso di n termini, cioè che $s_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Dobbiamo provare che $s_{n+1} = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

E infatti:

$$s_{n+1} = s_n + a_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} + a_0 q^n = a_0 \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n \right]$$

da cui, sviluppando i calcoli entro parentesi quadra,

$$s_{n+1} = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

In base al principio d'induzione concludiamo che la formula data vale per ogni numero naturale maggiore di zero⁴.

⁴ Ci sono altre dimostrazioni alternative per le due formule viste sopra: abbiamo scelto una non ricorsiva per le successioni aritmetiche perché ci sembra più semplice, mentre per le geometriche sembra più semplice quella ricorsiva. A rigore, si noti per altro (senza dirlo agli studenti) che anche la prima dimostrazione è una dimostrazione per induzione, ma l'induzione è nascosta dall'uso dei "...".

Attività 3

Il principio di induzione come strumento per dimostrare

Descrizione

Congetturare e dimostrare: osservando regolarità, ad esempio in sequenze numeriche, siamo indotti a formulare una congettura di una proprietà che valga in generale.

Prendiamo ad esempio in esame le somme del tipo:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

e calcoliamone qualche valore

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Viene spontanea la congettura $S_n = \frac{n}{n+1}$. La verifica per altri casi dà esito positivo, ma come dimostrare che la formula vale per *tutti* i valori di n ?

La verifica di pochi o molti casi non garantisce la validità nel caso generale. È famosa la seguente formula che sembra produrre numeri primi.

$$F_0 = 2^{(2^0)} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{(2^3)} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{(2^4)} + 1 = 65537$$

Partendo da questi pochi casi, Pierre de Fermat formula la congettura che, per ogni n , il numero $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ sia primo. Nel secolo successivo Eulero (senza calcolatrice!) trova la fattorizzazione di

$$F_5 = 2^{(2^5)} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417: \text{ la congettura di Fermat è falsa.}$$

In questa attività vedremo varie dimostrazioni in cui si applica il principio d'induzione. Le dimostrazioni riguarderanno contesti diversi:

- numerico (forma ricorsiva – forma chiusa di una successione);
- geometrico (intersezione di rette, ricoprimenti);
- giochi a strategia (induzione a ritroso).

L'attività si conclude con alcuni esempi nei quali non si riesce ad applicare il principio d'induzione, mostrando così come congetture basate su alcuni (anche molti ...) casi si possano poi rivelare false.

Fase 1

Forma ricorsiva e forma chiusa di una successione

Dimostriamo dapprima per induzione la validità della congettura formulata all'apertura di questa attività:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

PB: Per $n = 1$ si ha $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ e quindi il passo base è verificato.

PI: Supponiamo che la formula valga per n : $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Allora, sostituendo questo valore, si ha:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

e questo prova che la formula vale anche per $n+1$: pertanto la formula vale per ogni $n \geq 1$.

Non sempre è facile congetturare una formula per un problema. I modi in cui si arriva ad una congettura sono i più vari: molto spesso si parte dall'osservazione di alcuni casi particolari come nel caso appena visto, o dall'osservazione di regolarità, o di configurazioni geometriche.

Per un'ampia classe di problemi numerici c'è però un metodo che permette di ottenere, usando l'induzione, le formule cercate.

Nella fase 1 dell'attività precedente abbiamo dimostrato che la somma dei primi n numeri dispari è n^2 .

Vogliamo determinare le formule per problemi analoghi, quali:

- la somma dei primi n numeri pari;
- la somma dei primi n quadrati;
- la somma dei primi n quadrati dispari;
- la somma dei primi n cubi;
- la somma di n numeri dispari consecutivi.

L'osservazione di casi analoghi già risolti (di cui qui abbiamo visto la somma dei primi n numeri dispari) suggerisce una congettura sulla forma di tali

somme: se la formula che genera i numeri da sommare ha grado k , allora la formula cercata (quella che fornisce la somma) è un polinomio di grado $k + 1$. Si può cercare di giustificare questa congettura con gli studenti in modo che non appaia troppo calata dall'alto: un indizio ci è dato proprio dal primo caso visto nell'attività 2 (la somma dei primi n numeri dispari è n^2).

PROBLEMA: si vuole determinare la somma dei primi n quadrati: $S_n = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2$.

In base alla nostra assunzione, tentiamo di determinare un polinomio di terzo grado in n , che sia la somma richiesta S_n .

Sia allora $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Si tratta chiaramente di determinare i coefficienti a, b, c, d .

Questi si possono determinare calcolando la somma S_n per alcuni valori di n : una volta ottenuto un numero adeguato di equazioni nei coefficienti, si trovano i coefficienti e, successivamente, si dimostra per induzione la formula così ottenuta.

Un procedimento concettualmente più difficile, ma più interessante, sfrutta l'induzione stessa per determinare tali coefficienti. Infatti una forma chiusa *corretta* dovrà valere per $n = 1$, e poi *propagarsi* da n a $n+1$.

Osserviamo allora che

$$S_1 = 1, \quad \text{e quindi} \quad a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 1. \quad (*)$$

Inoltre, abbiamo che, per $n > 0$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$, per cui, sostituendo il polinomio:

$$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d = an^3 + bn^2 + cn + d + (n+1)^2$$

sviluppando e semplificando, si ottiene:

$$3an^2 + n(3a+2b) + a + b + c = n^2 + 2n + 1. \quad (**)$$

La (*) e il principio di identità dei polinomi applicato a (**) ci porta infine al sistema

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 3a=1 \\ 3a+2b=2 \\ a+b+c=1 \end{cases} \quad \text{da cui la soluzione} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{6} \\ d=0 \end{cases}$$

Quindi

$$S_n = 1/3n^3 + 1/2n^2 + 1/6n.$$

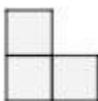
La formula così ottenuta è valida per il modo in cui è stata generata (verifica *necessariamente* le condizioni del Principio di induzione), e non necessita di ulteriori dimostrazioni. Tuttavia, per convincersi della correttezza del procedimento, è utile sia verificare la formula in qualche caso particolare, sia ripercorrere il procedimento per induzione.

Fase 2

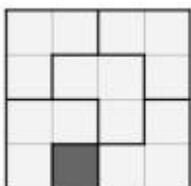
Una dimostrazione per induzione in geometria

Problema. Dimostrare che un quadrato di lato 2^n , privato di un qualunque quadretto unitario, può essere ricoperto senza sovrapposizioni da *trimini*.

Un *trimino* è una figura composta ad angolo da tre quadrati uguali, come in figura.



Per esempio, in figura è rappresentato un quadrato di lato $2^2 = 4$, privato di un quadratino, ricoperto da trimini.

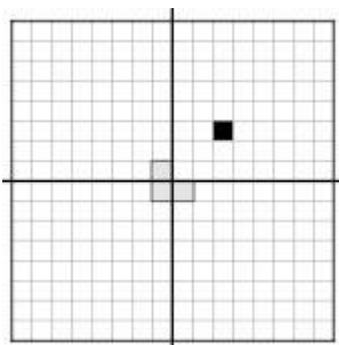


Passo base

Per $n = 1$, l'affermazione è ovviamente vera: un quadrato 2×2 privato di un quadretto è ricoperto da un trimino.



Passo induttivo



Supponiamo che sia possibile ricoprire un quadrato di lato 2^n , privato di un quadretto, con trimini; dimostriamo che allora è possibile ricoprire anche un quadrato di lato 2^{n+1} , cioè di lato doppio.

Dividiamo un quadrato di lato 2^{n+1} in quattro quadrati di lato 2^n . Uno dei quattro quadrati contiene il quadratino mancante: disponiamo un trimino attorno al vertice comune dei quattro quadrati, in modo che lasci libero quello contenente il quadratino mancante.

Ci sono ora quattro quadrati di lato 2^n , ciascuno con un quadratino mancante: quello iniziale più i tre del trimino. Siamo ora nelle condizioni di applicare l'ipotesi induttiva: ciascuno dei quattro quadrati è ricopribile con trimini; e quindi lo è anche l'intero quadrato.

Una bella applet, che descrive questo problema in modo interattivo, si trova all'indirizzo:

<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Tromino.shtml> 

Altri interessanti problemi geometrici sono proposti in *Spunti per altre attività 4*.

Fase 3

Induzione a ritroso: giochi con strategia vincente

In alcuni giochi il giocatore che conosce la *strategia* e riesce a ottenere un'opportuna posizione, è sicuro di vincere. L'induzione a ritroso è il metodo che spesso permette di trovare, o di dimostrare, una strategia vincente di un gioco.

L'induzione a ritroso funziona nel modo seguente:

- 1) Si considera la posizione finale del giocatore che vince (o che obbliga l'avversario a perdere).
- 2) Si mostra che esiste un insieme di posizioni, che diremo vincenti, con le seguenti proprietà:
 - ad ogni passo, la nuova posizione si *avvicina* a quella finale, senza possibilità di cicli (cioè senza la possibilità di ritornare ad una posizione precedente);
 - chi muove da una posizione vincente *deve* ottenere una posizione perdente, mentre chi muove da una perdente *può* (con un'opportuna mossa) conquistare una posizione vincente.

Vediamo un'applicazione dell'induzione a ritroso in un semplice gioco.

Il gioco del 21

Su un tavolo ci sono 21 oggetti. Due giocatori a turno possono togliere da 1 a 5 oggetti. Perde il giocatore che toglie l'ultimo oggetto dal tavolo. Quanti oggetti deve togliere il primo giocatore per essere sicuro di vincere?

Si lascia che gli studenti esplorino il problema e formulino congetture.

Si passa quindi a considerare il caso generale in cui gli oggetti sono n .

Il giocatore che lascia sul tavolo 1 oggetto vince, perché l'avversario è costretto a togliere l'ultimo oggetto.

Supponiamo che lasciare n oggetti sul tavolo sia vincente. Per essere sicuro che il mio avversario non raggiunga un'altra posizione vincente occorre che $n - a$ sia perdente per $a = 1, 2, \dots, 5$ (mosse possibili del mio avversario).

D'altra parte voglio riportarmi in una posizione vincente alla mossa successiva. Osserviamo che, qualunque sia la mossa del mio avversario, posso sicuramente raggiungere la posizione in cui ci sono $n - 6$ oggetti sul tavolo. La strategia sarà quindi, a partire da una posizione vincente, di togliere dal tavolo 6 oggetti per ogni coppia di mosse. Da una posizione vincente, mantengo la condizione di vantaggio togliendo il complemento a 6 rispetto al numero di oggetti tolti dal mio avversario.

Le posizioni vincenti sono quindi quelle in cui il numero di oggetti sul tavolo è dato dalla forma ricorsiva:

$$P(0) = 1$$

$$P(n+1) = P(n) + 6$$

Ossia, nel caso dei 21 oggetti che abbiamo esaminato prima: 1, 7, 13, 19 cioè numeri che hanno resto 1 nella divisione intera per 6.

Nel caso proposto la mossa per vincere è togliere dal tavolo 2 oggetti (e lasciarne 19). Alla mossa successiva, qualunque sia la scelta fatta dal mio avversario, dovrò tornare in una posizione vincente, cioè lasciare sul tavolo 13 oggetti. E così via fino a quando rimane 1 solo oggetto.

Un altro gioco è presentato in *Spunti per altre attività 4*.

Fase 4

Alcuni esempi che possono condurre in errore

Nelle scienze sperimentali, spesso si applica il *metodo induttivo*: se un fatto si verifica in molti casi particolari, allora se ne deduce che quel fatto vale in

generale. Nonostante l'apparente analogia suggerita dalla parola 'induttivo', tale metodo non ha niente a che fare con i procedimenti che abbiamo visto fin qui. Gli esempi seguenti mostrano la sua inapplicabilità in matematica.

Esempio 1

Leibniz dimostra che, per ogni n , valgono le affermazioni:

- $n^3 - n$ è divisibile per 3 (in altri termini, $n^3 \equiv n \pmod{3}$);
- $n^5 - n$ è divisibile per 5;
- $n^7 - n$ è divisibile per 7.

e formula la congettura che la proprietà valga per ogni numero dispari p : $n^p - n$ è divisibile per p .

La prima affermazione, relativa al numero 3, si dimostra facilmente con la scomposizione $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ in cui compare un prodotto di tre numeri consecutivi, uno dei quali è necessariamente multiplo di 3.

Non riportiamo le dimostrazioni relative agli altri casi che sono un po' più complicate

Tuttavia $2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$ non è divisibile per 9. Quindi la congettura è sbagliata.

Esempio 2

Consideriamo i numeri a_n così definiti: $a_n = n^2 + n + 41$. Si ha $a_0 = 41$, $a_1 = 43$, $a_2 = 47$, $a_3 = 53$, $a_4 = 61$,

$a_5 = 71$, $a_6 = 83$, $a_7 = 97$, ...

Abbiamo trovato solo numeri primi. Vale allora la congettura che a_n è primo per ogni n ?

La risposta è no: infatti per $n = 40$ si ha $a_{40} = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41^2$ che non è primo.

E' curioso osservare che si ottengono *numeri primi per ogni* $n < 40$.

Nell'esempio 2 si vede che non bastano *molti* casi per concludere che una congettura è corretta: 40 verifiche sembrano abbastanza, ma non bastano. Citiamo altri due esempi di congetture sbagliate, che pure hanno un numero molto grande di casi iniziali favorevoli.

1) *Congettura*: 2^{p-1} non è divisibile per p^2 (con $p > 1$).

La tabella seguente mostra alcuni casi nei quali l'affermazione è verificata:

p	$2^{p-1}-1$	p^2	
2	$2^2 - 1 = 3$	4	3 non è divisibile per 4
3	$2^3 - 1 = 7$	9	7 non è divisibile per 9
4	$2^4 - 1 = 15$	16	...
5	$2^5 - 1 = 31$	25	
...			
11	1023	121	
12	2047	144	2047 non è divisibile per 144
...			

L'affermazione è vera per p da 2 fino a 1091, ma ... è falsa per $p = 1092$.

2) *Congettura*: L'espressione $F(n) = 991n^2 + 1$ non è mai un quadrato, per $n > 0$.

Lo si può controllare in qualche caso: $F(1) = 992$, $F(2) = 996$, $F(3) = 1001$,
L'affermazione sembra vera in generale, ma non è vera per *tutti* gli n .

Infatti, per $n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$, incredibilmente $F(n)$
è un quadrato.

Attività 4

Il principio di induzione come strumento per risolvere problemi

Descrizione

"La TORRE DI HANOI

gioco caduto da Saturno

E portato dal Tonchino dal Mandarino N. Claus (di Siam)"

Così titola la [pubblicazione del 1889](#) con cui il matematico francese *Edouard Lucas* presenta il suo gioco (si noti che *Claus* è un anagramma di *Lucas*).

L'articolo comincia con queste parole:

"Ascoltate, piccoli e grandi, questa storia meravigliosa e vera! C'è una vecchia leggenda indiana, riportata dal Mahabarahta dal monaco AHU, maestro di Capella della Sublime Trombetta. Ci è stata trascritta dal Sanscrito dal Grande Arci-Prete dei sacrifici TE-CHU-POG, colui che ordina l'ecatombe di balene, al Palazzo dei Mastodonti – e Cetacei – di Patalipûtra, la Città dei Fiori, l'antica Capitale dei Monarchi storici dell'India.

Nel grande tempio di Benares, sotto la cupola che segna il centro del mondo si vedono tre aghi di diamante, piantati in una lastra di bronzo, alti un cubito e

spessi come il corpo di un'ape. Su uno di questi aghi, il dio PARABAVASTÙ infilò, all'inizio del tempo, sessantaquattro dischi di oro puro, il più ampio appoggiato sul bronzo e gli altri, via via più stretti, appoggiati sopra fino alla cima. Questa è la Torre Sacra di VISHNU. Notte e giorno, i monaci si succedono ai gradini dell'altare, impegnati a trasportare la Torre Sacra, dal primo ago al terzo, piano per piano, senza mai invertire, senza mai allontanarsi dalle regole sacre imposte dal BRAHMA.

Quando tutto sarà finito, la Torre e i Bramini cadranno e sarà la fine dei mondi.”

Fase 1

Il problema della **Torre di Hanoi** è un classico per tutti gli studenti di informatica, quando affrontano la teoria della programmazione.

Il gioco è composto da tre paletti e un certo numero di dischi di grandezza decrescente, che possono essere infilati su uno qualsiasi dei paletti.

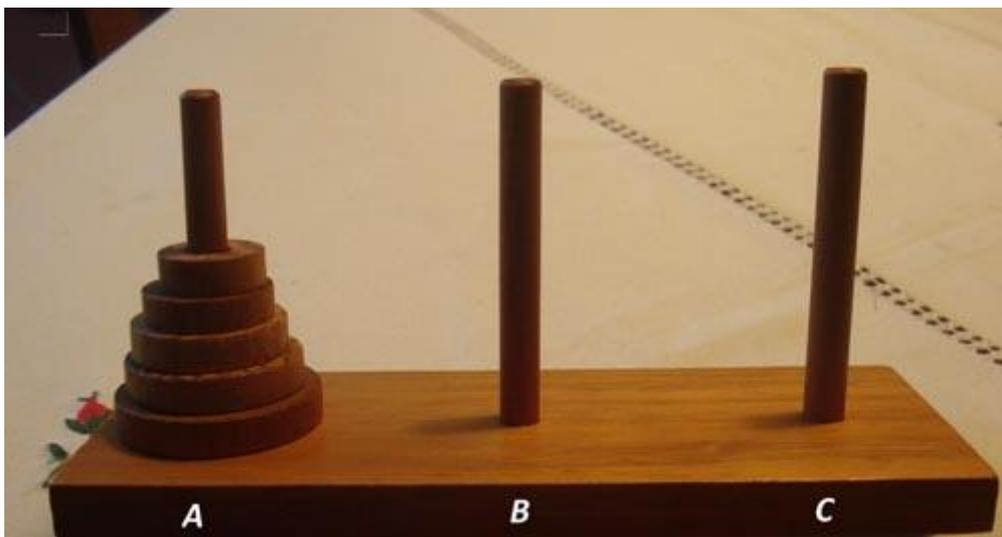


Figura 1

Il gioco inizia con tutti i dischi infilati su un paletto in ordine decrescente, in modo da formare un tronco di cono. Lo scopo del gioco è portare tutti i dischi su un paletto vuoto; è lecito spostare solo un disco alla volta ed è lecito mettere un disco solo su un altro disco *più grande*, mai su uno più piccolo.

Indichiamo i paletti con A, B e C, e i dischi da 1 a 5 (1 il più piccolo e 5 il più grande).

Proponiamo il problema: *spostare cinque dischi da A in C, secondo le regole date.*

L'idea guida è la seguente: *se so come spostare 4 dischi, allora mi basta spostare i 4 dischi superiori presenti sul paletto A di partenza in B, che uso come deposito temporaneo.*

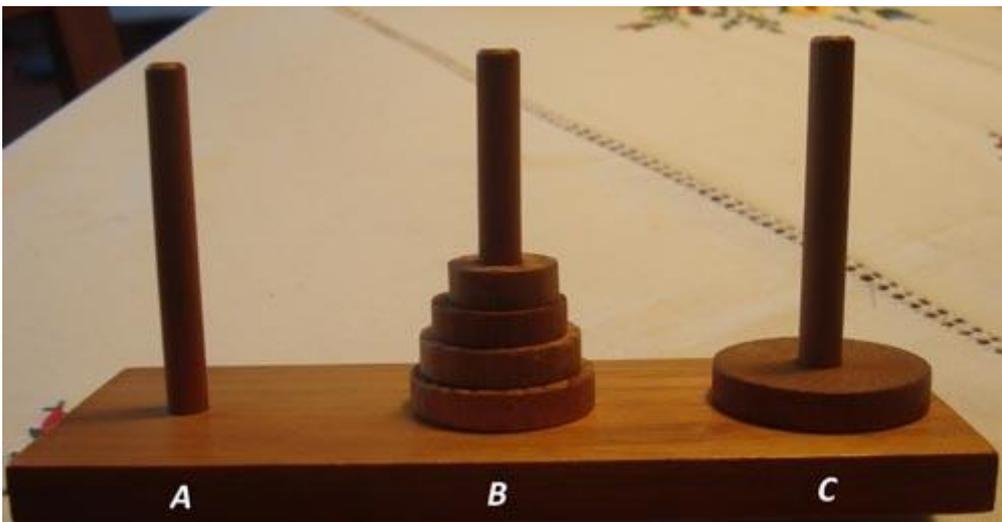


Figura 2

A questo punto sposto il disco grande sul paletto C e riporto i 4 dischi piccoli sopra il grande. In conclusione, **se so come spostare 4 dischi, so anche come spostare 5 dischi**

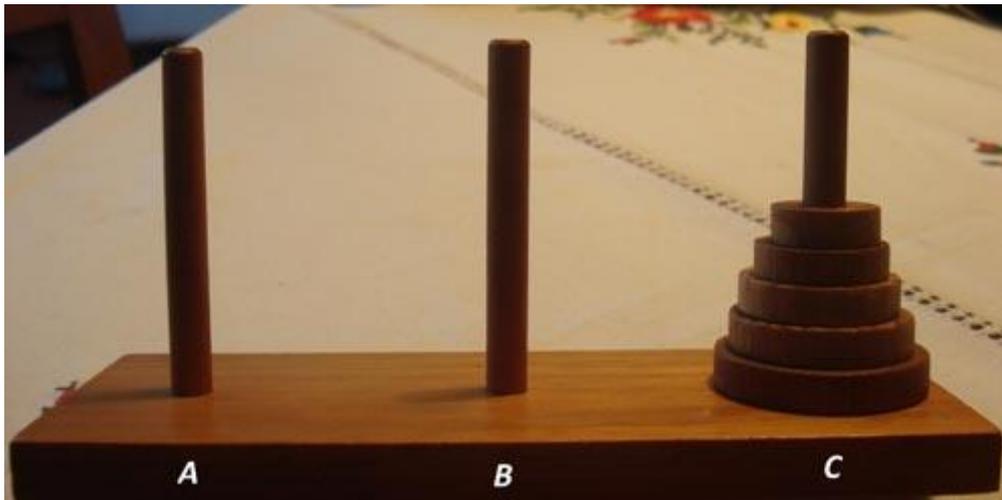


Figura 3

Naturalmente si può obiettare che lo spostamento riesce se so come spostare 4 dischi. Ma, come ormai è facile intuire, per spostare 4 dischi mi basta sapere come spostare **3 dischi**, quindi mettere il più grande nel paletto di destinazione, ed infine spostare i 3 sopra di esso. E così di seguito, per spostare 3 dischi, mi basta sapere come ... finché non arrivo a 1 disco. E nel caso di 1 disco la soluzione è banale.

In altri termini, ho un *procedimento ricorsivo*:

so spostare n dischi se so spostare $n - 1$ dischi;

so spostare $n - 1$ dischi se so spostare $n - 2$ dischi;

...

so spostare 1 disco (passo base).

L'aspetto intrigante ed un po' misterioso di un procedimento ricorsivo è che non si capisce bene come funziona, finché non si prova ad eseguirlo passo dopo passo.

Invitiamo i lettori a provare in casi semplici, quali $n = 3$ ed $n = 4$; se non si è in possesso del gioco, si può sfruttare un'applet come mostrato [qui](#).

Analizziamo in dettaglio il procedimento risolutivo. Dovendo descrivere un algoritmo è preferibile considerare come passo base il caso $n = 0$, in cui il gioco è risolto ... senza fare nulla!

Indicando il numero di dischi da spostare con n , il paletto di partenza con A , quello ausiliario con B e quello di destinazione con C , e i dischi da 1 a n (1 il più piccolo e n il più grande), l'algoritmo generale, che chiameremo *Hanoi*, si esprime come segue:

Hanoi (n : numero di dischi, A : partenza, B :ausiliario, C : destinazione)

se $n = 0$

allora

questo algoritmo termina

altrimenti

Hanoi($n-1$, A , C , B);

Sposta il disco n da A a C ;

Hanoi($n-1$, B , A , C);

fine se.

Si notino i diversi ruoli (come *partenza*, *ausiliario* o *destinazione*) dei 3 paletti A , B e C nelle chiamate ricorsive all'algoritmo stesso.

Fase 2

Completiamo lo studio della Torre di Hanoi, proponendoci di calcolare quante mosse $M(n)$ servono per spostare n dischi.

Provando direttamente con i numeri più piccoli, otteniamo i seguenti valori:

$M(1) = 1$,

$M(2) = 3$,

$M(3) = 7$,

$M(4) = 15$.

Questi valori sono sufficienti per suggerire che $M(n) = 2^n - 1$.

Si può dimostrare questa formula per *induzione*.

PB. Per $n = 1$ risulta $2^1 - 1 = 1$: la formula è corretta (per spostare un disco basta una mossa).

PI. Supponiamo che si riescano a spostare n dischi in $2^n - 1$ mosse. Quante mosse serviranno per spostare $n+1$ dischi?

L'algoritmo dice che $M(n+1) = M(n) + 1 + M(n)$. Infatti, si devono prima spostare n dischi piccoli sul paletto ausiliario, lasciando il più grande sul paletto di partenza, e per fare questo occorrono $M(n) = 2^n - 1$ mosse; poi si sposta il disco grande sul paletto di destinazione (1 mossa) e infine di nuovo si spostano gli n dischi piccoli sul paletto di destinazione (ancora $M(n) = 2^n - 1$ mosse).

In totale occorrono $M(n+1) = 2^n - 1 + 1 + 2^n - 1$ mosse, cioè $2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ mosse.

Il passo induttivo è quindi dimostrato.

Per il principio di induzione, concludiamo che, per ogni $n > 0$ si ha $M(n) = 2^n - 1$. Aggiungiamo che si dimostra che non è possibile spostare n dischi in un numero minore di mosse.

EPILOGO

Un problema finale, o forse, il problema dei problemi: se i monaci del tempio di Benares impiegano un secondo per ogni mossa, ci dobbiamo preoccupare se quando avranno terminato ci sarà la fine dei mondi?

Fase 3

Ancora sugli anagrammi

Il principio d'induzione applicato agli algoritmi ne permette a volte una descrizione relativamente semplice o quanto meno breve, come nel caso della Torre.

La struttura descrittiva di tali algoritmi, detta ricorsione, è costituita da:

- una *condizione di arresto*, che determina quando l'algoritmo ha termine, e corrisponde in prima approssimazione al passo base;
- un *passo ricorsivo*, che richiama all'interno dell'algoritmo l'algoritmo stesso.

Presentiamo un algoritmo ricorsivo per la generazione di tutti gli anagrammi di una parola con lettere diverse.

Data la parola FIORE, teniamo da parte l'ultima lettera E e prendiamo uno degli anagrammi composti dalle prime quattro lettere: ad esempio FIRO. (Avremmo potuto tenere da parte la prima lettera, o una qualsiasi delle altre.)

Ora possiamo inserire la lettera E nell'anagramma parziale FIRO nei 5 modi possibili:

EFIRO, FEIRO, FIERO, FIREO, FIROE. L'operazione di inserimento produce **5** anagrammi per ciascuno dei **24** anagrammi della parola di **4** lettere.

Per trovare gli anagrammi con n lettere, dobbiamo quindi avere quelli con $n - 1$ lettere, che a loro volta richiedono quelli con $n - 2 \dots$ Quando la parola ha 1 lettera, il suo unico anagramma è lei stessa.

La *condizione di arresto* è in questo caso la parola di una sola lettera: viene restituita la parola stessa e il procedimento ha termine.

Il *passo ricorsivo* è: data una parola con più di 1 lettera, si tiene da parte la prima lettera della parola e la si inserisce in tutte le posizioni in ciascuno degli anagrammi della parola privata della prima lettera.

Descriviamo, usando il linguaggio javascript disponibile con ogni programma di lettura di pagine web, l'algoritmo ricorsivo che calcola tutti gli anagrammi di una parola con lettere diverse. Invece che di lettere, si parla spesso di caratteri.

<pre>function INSERISCI(a,s) { var risultato = []; var parola; var l = s.length; for (var i = 0; i<=l; i++) { parola= s.substring(0,i)+a+s.substring(i,l); risultato.push(parola); } return risultato; }</pre>	<p>La funzione INSERISCI (a,s) ha due argomenti: a, un carattere, e s una stringa.</p> <p>La funzione restituisce l'array di tutte le stringhe ottenute inserendo in tutte le posizioni possibili di s il carattere contenuto in a. Per una parola di n lettere, la funzione produce una lista di n+1 nuove parole. Le variabili locali sono:</p> <p>risultato è l'array delle stringhe prodotte;</p> <p>parola è la singola stringa ottenuta in ciascun ciclo;</p> <p>s.substring(n,m) è la sottostringa di s che inizia nella posizione n ed è lunga m caratteri. Il primo carattere di s ha posizione 0.</p> <p>risultato.push(parola) inserisce il coda all'array risultato la stringa parola.</p>
---	--

Una seconda funzione, VINSERT(a,vp), ripete l'operazione di inserimento del carattere **a** per una lista di parole diverse contenuta nell'array **vp**.

<pre>function vinsert(a,vp) { var v1=[]; l=vp.length; for (var i=0; i<l;i++) { v1=v1.concat(INSERISCI(a,vp[i])); vp.shift(); } return (v1); }</pre>	<p>Le variabili locali della funzione VINSERT(a,vp) sono:</p> <p>v1 è l'array di tutte le stringhe prodotte;</p> <p>v1.concat(INSERISCI(a,vp[0])) aggiunge all'array v1 il risultato della funzione INSERISCI che viene applicata al primo (indice 0) elemento dell'array vp.</p> <p>vp.shift() dopo l'inserimento in v1 delle stringhe prodotte, l'elemento utilizzato viene cancellato dall'array vp.</p>
--	--

Infine, la funzione **ANAGRAMMI(p)** che descrive l'algoritmo ricorsivo degli anagrammi della parola **p** (con lettere diverse):

<pre>function ANAGRAMMI(p) { if (p.length == 1) { return [p]; } else { return vinsert(p.substr(0,1),ANAGRAMMI(p.substr(1))); } }</pre>	<p>La funzione ANAGRAMMI riceve come argomento una parola. Se la parola ha un solo carattere, la funzione la restituisce come array di un elemento.</p> <p>Se invece ha più di un carattere, produce l'array delle parole ottenute inserendo il primo carattere (p.substr(0,1)) in tutti gli ANAGRAMMI della parola ottenuta da quella ricevuta a cui è stata cancellata la prima lettera (indice 0), cioè la parola che parte dal carattere di indice 1 (p.substr(1)).</p> <p>Come si vede, nella funzione ANAGRAMMI si utilizza la chiamata</p>
--	--

	<i>ricorsiva</i> alla funzione stessa.
--	--

Si osservi la compattezza della descrizione dell'algoritmo ricorsivo permessa proprio dal fatto che la funzione definita viene richiamata in un passo al suo interno.

Ecco alcune esecuzioni.

ANAGRAMMI(TRE)

[TRE, RTE, RET, TER, ETR, ERT]

ANAGRAMMI(PERA)

[PERA, EPRA, ERPA, ERAP, PREA, RPEA, REPA, REAP,
PRAE, RP AE, RAPE, RAEP, PEAR, EPAR, EAPR, EARP, PAER, APER,
AEPR, AERP, PARE, APRE, ARPE, AREP]

DIMENSION(ANAGRAMMI(PIETRA))

720

Le esecuzioni sono tratte dal file [anagrammi.htm](#) ↓

E se la parola contiene lettere ripetute? Come abbiamo già accennato, presentiamo l'argomento, per chi è interessato, nell'approfondimento [anagrammi con lettere ripetute](#) ↓

e nella pagina [anagrammi lettere ripetute.htm](#) ↓

Indicazioni metodologiche

Premessa

Questo argomento ha un peso diverso nelle indicazioni e nelle linee guida. Per venire incontro a situazioni e obiettivi diversi (nei licei si richiede "la capacità di saperlo applicare"), si sono organizzate le attività in due parti: la prima (attività 1 e 2) è rivolta a tutti gli ordini di scuola, la seconda (attività 3 e 4) solo ai licei, e alle classi che vogliono approfondire il tema.

Attività 1

Questa attività ha lo scopo di rendere esplicita la formulazione ricorsiva di molte definizioni ed algoritmi di calcolo, anche di uso comune. Si parte proponendo alcuni casi di anagrammi per giungere alla definizione ricorsiva del fattoriale. Tra gli esempi successivi si propone una versione ricorsiva dell'algoritmo euclideo del MCD.

Sarà cura dell'insegnante evidenziare il fatto che le definizioni ricorsive *ben fatte* non generano circoli viziosi, perché il definito e il definiente non sono mai uguali;

- né generano ricorsioni infinite (regressi all'infinito), perché il passo base fa sì che il processo ricorsivo abbia termine (per questo punto è essenziale il fatto che si considerano numeri naturali).

Attività 2

La seconda attività ha lo scopo di fondare logicamente i processi induttivi mediante il *principio di induzione*.

Il principio di induzione appare tra gli assiomi di Peano. È quindi alla base della teoria dei numeri naturali.

Il funzionamento del principio si basa sul *modus ponens*, una regola di inferenza logica di uso comune in matematica così come nel ragionamento informale. Tuttavia, il principio di induzione lascia sempre molte perplessità negli alunni. Soltanto la pratica nell'uso porta una certa confidenza con questo strumento del pensiero, ma non sempre a scuola c'è il tempo per una pratica adeguata.

Un ulteriore approfondimento (in particolare una seconda forma del principio) è costituito da [sul principio di induzione](#) ↓

La seconda fase propone un approccio ricorsivo alle successioni aritmetiche e geometriche, in cui compaiono sia definizioni ricorsive, sia dimostrazioni per induzione.

Attività 3

In questa attività si cerca di mettere a fuoco l'uso dell'induzione nella dimostrazione. Questa attività, così come la successiva, non è semplice: ogni insegnante potrà scegliere gli esempi più appropriati per la sua classe.

Uno dei rilievi che si fa alle dimostrazioni per induzione è che bisogna già conoscere le formule che si vogliono dimostrare, mentre in altri casi una dimostrazione diretta fornisce anche una giustificazione della formula stessa, cioè spiega come è stata ottenuta quella formula. L'osservazione è corretta, ma solo in parte.

Infatti, abbiamo già osservato come spesso sia proprio l'aspetto ricorsivo che ci porta a certe definizioni, o formule, e vedremo nell'attività 4 come in qualche caso proprio l'induzione consenta di scrivere la soluzione di un problema. Inoltre, quasi sempre le formule sono congettrate in modo empirico, ad esempio dall'osservazione di alcuni casi particolari; solo dopo se ne cerca una dimostrazione, per garantirci della validità delle formule in generale.

Nella **fase 1** si propone un metodo che permette di costruire, *usando l'induzione*, formule chiuse per un'ampia classe di problemi numerici. Successivamente, si propongono dimostrazioni per induzione in campo geometrico e nella teoria dei giochi.

Attività 4

L'attività si conclude con l'applicazione del principio di induzione alla risoluzione di problemi mediante costruzione di algoritmi ricorsivi. Come caso emblematico, si studia l'algoritmo risolutivo della *Torre di Hanoi*, un algoritmo ben noto agli informatici, in cui la soluzione del problema sta nella *nascosta semplicità delle chiamate ricorsive*. Il calcolo del tempo necessario a risolvere il problema originario (con 64 dischi) permette anche di riflettere sulla complessità intrinseca di certi problemi.

Spunti per approfondire

Spunti per un approfondimento disciplinare

Il principio della discesa infinita (approfondimento 1)

Il *principio della discesa infinita* è un metodo per dimostrare che una proprietà $P(n)$ non vale per alcun numero naturale n . Si suppone per assurdo che la proprietà $P(n)$ sia vera per un qualche n e, da questo fatto, si ricava che deve essere vera anche per un altro numero naturale $m < n$. Siccome il discorso si può ripetere, si viene a contraddire il *principio del minimo numero* che vale per i numeri naturali, secondo il quale ogni insieme di numeri naturali ha un minimo.

In termini intuitivi, partendo da un numero n_0 per cui vale $P(n_0)$, si costruisce un numero $n_1 < n_0$ per cui vale $P(n_1)$, e poi un numero $n_2 < n_1$, ecc. Ma in questo modo si otterrebbe una successione infinita decrescente di numeri naturali

$$n_0 > n_1 > n_2 > n_3 > \dots$$

il che è assurdo (si noti che non si arriverebbe ad una contraddizione se considerassimo numeri interi relativi, invece che naturali).

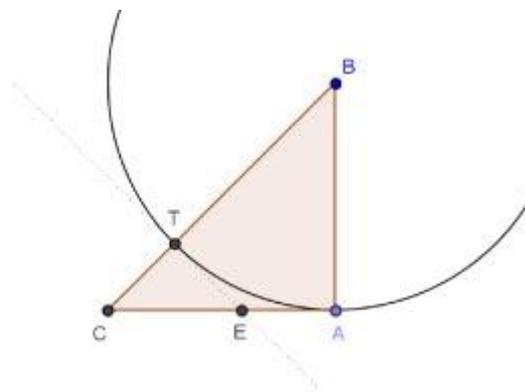
In logica si dimostra che tanto il principio della discesa infinita quanto il principio del minimo numero sono equivalenti al principio di induzione.

Il principio della discesa infinita è stato creato da Pierre de Fermat, che lo ha applicato per esempio nella dimostrazione per il caso $n = 4$ del suo famoso “ultimo teorema”: l’equazione $x^4 + y^4 = z^4$ non ha soluzioni.

Vediamo, come applicazione del principio della discesa infinita, una dimostrazione geometrica (riportata per esempio nell’articolo di T. M. Apostol citato in bibliografia). Vogliamo dimostrare che le lunghezze dei lati un triangolo

rettangolo isoscele non possono essere tutte intere; si tratta, in altre parole, di una dimostrazione dell'irrazionalità della radice quadrata di 2.

Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele con i lati di lunghezza intera: sia h la lunghezza dei cateti e sia k la lunghezza dell'ipotenusa; per applicare il principio della discesa infinita dobbiamo trovare un altro triangolo rettangolo isoscele ancora con i lati di lunghezza intera, ma di lunghezza minore rispetto ai lati di ABC (per essere più precisi, possiamo applicare il principio della discesa infinita facendo riferimento alla lunghezza dell'ipotenusa).



Disegniamo, come in figura, la circonferenza di centro B e raggio BA ; detto T il punto d'intersezione fra la circonferenza e l'ipotenusa, tracciamo la tangente TE alla circonferenza. Il triangolo CET è rettangolo (l'angolo in T è retto) e isoscele (l'angolo in C è di 45°).

Inoltre, anche i lati di CET hanno lunghezza intera. Infatti, si ha $CT = TE = EA$ (l'ultima uguaglianza vale perché TE ed EA sono segmenti di tangente mandati da E alla circonferenza); quindi i cateti di CET sono uguali a $CB - TB$, cioè alla differenza fra l'ipotenusa e un cateto del triangolo iniziale ($k - h$), mentre CE è la differenza fra CA ed EA ($2h - k$).

Ovviamente le lunghezze dei lati del triangolo CET sono minori di quelle dei lati del triangolo ABC . Applicando il principio della discesa infinita, otteniamo

l'asserto: non esiste alcun triangolo rettangolo isoscele con i lati di lunghezza intera.

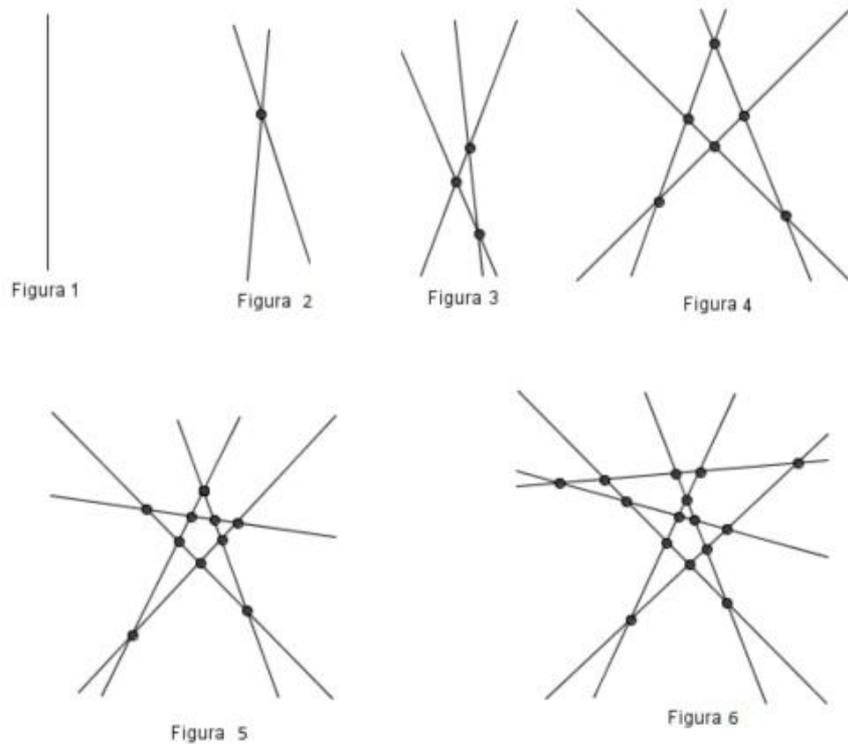
Spunti per altre attività con gli studenti

Attività 1

(da *Matematica 2004* approfondimenti: *argomentare, congetturare, dimostrare*)

Quanti sono i punti di intersezione di n rette del piano tali che non vi siano rette parallele e in nessun punto si intersechino più di due rette?

Si invitano gli studenti a valutare in casi particolari l'enunciato proposto, facendo riferimento alle seguenti figure:



N° rette	1	2	3	4	5	6
N° Punti d'intersezione	0	1	3	6	10	15

Gli studenti devono giungere, analizzando i casi, alla formulazione di una regola ricorsiva, cioè che spieghi come si passi dal numero di intersezioni nel caso di n rette al numero di intersezioni nel caso di $n + 1$ rette.

Probabilmente gli studenti formuleranno varie regole, alcune delle quali errate. L' intervento dell'insegnante diviene fondamentale nel momento della comprensione del seguente fatto geometrico: date $(n-1)$ rette, una nuova retta nelle condizioni volute interseca le precedenti in $(n-1)$ punti distinti. Il discorso geometrico va poi formalizzato con la formula ricorsiva:

$$s_n = (n-1) + s_{n-1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = n(n-1)/2 \quad (\text{somma dei primi } (n-1) \text{ numeri naturali}).$$

Attività 2

1) *Provare che se a è un reale positivo, allora $(1+a)^n \geq 1 + na$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ (Disuguaglianza di Bernoulli).*

Se $n = 1$, si ha $1 + a \geq 1 + a$, che è vera.

Abbiamo poi le seguenti uguaglianze e disuguaglianze (si noti che deve essere $1+a > 0$, cosa che è senz'altro soddisfatta se a è positivo):

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

2) *Sia $P(n)$ l'affermazione (che si riferisce ad un numero $n > 1$):*
 $1 + 2 + \dots + n = (2n + 1)^2/8$

- *Provare che se $P(k)$ è vera per un fissato valore k , anche $P(k + 1)$ è vera*
- *In realtà, $P(n)$ è falsa per ogni n ; più precisamente, mostrare che per ogni n vale l'affermazione $Q(n)$:*

$$1 + 2 + \dots + n < (2n + 1)^2/8$$

L'insegnante consiglia di fissare un $k > 1$ e supporre vera $P(k)$.

Considerando ora la situazione che si presenta per $k + 1$, si ottiene:

$$(1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = (2k + 1)^2/8 + (k + 1) = (2k + 3)^2/8 = ((2(k + 1) + 1)^2)/8$$

Dunque vale $P(k + 1)$.

L'insegnante ora propone di controllare la proprietà per alcuni valori di n tra i quali $n=1$. Si vede facilmente che la proprietà è falsa per ciascuno degli n provati.

Che cosa è venuto a mancare nella dimostrazione? La verifica della proprietà per $n=1$ (infatti è falso che $1 = 9/8$).

La disuguaglianza $1 < 9/8$ prova che vale $Q(1)$. È poi facile dimostrare che, se è vera $Q(k)$, è vera anche $Q(k + 1)$. Si ha infatti:

$$(1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) < (2k + 1)^2/8 + (k + 1) = (2k + 3)^2/8 = ((2(k + 1) + 1)^2)/8$$

Si conclude così che $Q(n)$ è vera per ogni n . E questo basta per provare che $P(n)$ è falsa per ogni n .

Attività 3

Trova l'errore (Matematica 2004)

Sia $P(n)$ l'affermazione: in qualunque insieme di n persone, tutte hanno la stessa età.

Provare per induzione che la proprietà $P(n)$ è vera qualunque sia n . Dunque, in un qualunque insieme di persone, tutte hanno la stessa età.

La proprietà è vera per $n = 1$, perché ognuno ha la stessa età di se stesso. Supposta vera la proprietà per un insieme di n persone, si consideri un insieme di $n+1$ persone, aggiungendo 1 persona alle prime n .

*	*	*	*	*	*	
1,	2,	3,	...	$n-1,$	$n,$	$n+1$
	*	*	*	*	*	*

Considerando le prime n persone (con * in alto); esse hanno tutte la stessa età; ma anche prendendo le ultime n (con * in basso), esse hanno la stessa età. Poiché le persone dalla seconda all'ennesima sono le stesse nei due raggruppamenti, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, tutte le $n+1$ persone hanno la stessa età.

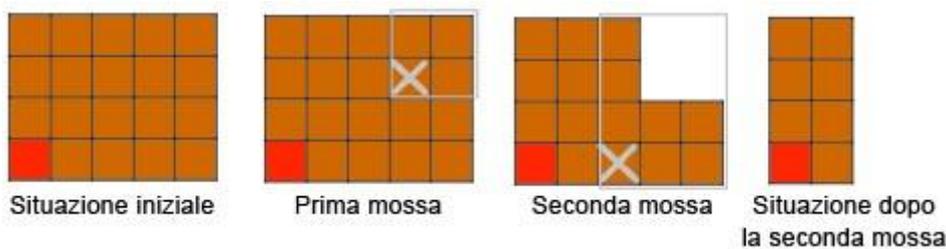
Qui l'errore nasce dal fatto che il passo induttivo da n a $n+1$ non vale per $n = 1$: non si può usare la proprietà transitiva in un insieme di due persone!

In conclusione, è bene riflettere sul fatto che nella dimostrazione per induzione tutti i passi indicati sono essenziali!

Attività 4

Chomp, il boccone avvelenato.

Una tavoletta di cioccolata, di $m \times n$ quadretti, ha il quadretto in basso a sinistra avvelenato. Due giocatori a turno mangiano una porzione di tavoletta: scelgono a piacere un quadretto e devono prendere tutto ciò che è in alto e a destra rispetto al quadretto. Per esempio, le figure seguenti illustrano alcune mosse con una tavoletta 5×4 .



Il Chomp è stato proposto da Martin Gardner in *Enigmi e Giochi Matematici* (Scientific American, 1973). Una trattazione estesa, da cui sono state tratte queste note, si trova in *Giochi e percorsi matematici*, Delucchi, Gaiffi, Pernazza Springer 2012.

Nel caso semplificato del Chomp per tavolette $2 \times n$ c'è una strategia vincente per il primo giocatore, che si dimostra facilmente con l'induzione a ritroso. Ad esempio, una partita al Chomp 2×8 parte con questa tavoletta:



La penultima mossa vincente lascia all'avversario la configurazione sottostante.



Chi deve muovere ora perde in ogni caso. Può mangiare uno dei due quadretti non velenosi (in marrone): in questo caso l'avversario mangia l'altro e gli lascia come ultimo quello rosso avvelenato. Se invece chi deve muovere sceglie il quadretto rosso (terza possibilità), perde subito. Sono altrettanto vincenti tutte le configurazioni costituite da un rettangolo senza il quadretto opposto a quello rosso, come in figura.



Sono facili da controllare i tre fatti seguenti:

- 1) ogni mossa riduce il numero di quadretti, e quindi la partita ha termine;
- 2) da una configurazione vincente, come definita sopra, non si può produrre con una mossa un'altra configurazione vincente;
- 3) da una configurazione diversa da quelle vincenti si può sempre creare una vincente con una sola mossa.

I tre fatti citati garantiscono a chi crea per primo una configurazione vincente di mantenerla, mossa dopo mossa, fino alla vittoria.

Elementi per prove di verifica

1. Sia $P(n)$ l'affermazione: ogni numero naturale n è uguale al suo successivo $n + 1$
 - Provare che se $P(k)$ è vera per un certo valore k , anche $P(k+1)$ è vera.
 - Possiamo concludere che $P(n)$ è vera per ogni n ?
 - È stato usato in maniera corretta il principio d'induzione?

- Per provare che la proposizione è falsa per ogni n è sufficiente verificare ciò per alcuni valori di n ?

2. Provare che, per $n > 0$: $n! \geq 2^{n-1}$

3. Provare che, per $n > 1$:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Si noti che, in questo caso, si arriva al risultato anche senza applicare il principio di induzione, ma semplificando le frazioni:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

In realtà, l'uso dei "..." nasconde, a rigore, il principio di induzione.

4. Dimostrare che per ogni n si ha: $(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + \dots + n^3$

5. Dimostrare che il numero delle diagonali di un poligono convesso di n lati è $\frac{n(n-3)}{2}$

(Da Matematica 2004, *Numeri e algoritmi*)

Congetture e dimostrazioni con i numeri naturali

1. Trova la somma dei primi 100 numeri dispari. Trova la somma dei primi n numeri dispari.
2. Trova la somma dei primi 100 numeri pari. Trova la somma dei primi n numeri pari.

3. Determina una formula che dia la somma dei primi n numeri naturali multipli di 3.

Risorse

Documentazione e materiali

[Il principio di induzione](#) ↓

[Anagrammi ripetuti](#) ↓

La somma dei primi numeri naturali (Matematica 2003, pag. 91)

La concentrazione di un farmaco nel sangue (Matematica 2003, pag. 245)

Quante rette per n punti (Matematica 2003, pag. 387)

Tasselli del domino e induzione (Matematica 2003, pag . 409)

$0; n; n+1, \dots \notin$ (Matematica 2004, pag. 134)

La concentrazione del tasso alcolemico (Matematica 2004, pag. 161)

Bibliografia

Villani, V. *Cominciamo da Zero*. Pitagora Editrice, Bologna 2003.

Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. *Non solo calcoli - domande e risposte sui perché della matematica*. Convergenze, Springer, Milano 2012.

Childs, L. *Algebra un'introduzione concreta*. ETS Editrice, Pisa 1989.

Sominskii, I. S. *Il metodo di induzione matematica*. Progresso Tecnico Editoriale, (Argomenti di Matematica), Milano 1965.

Golovina, L.I., Yaglom, I.M. *L'induzione in geometria*. Progresso Tecnico Editoriale, (Argomenti di Matematica), Milano 1966.

Apostol, T.M. *Irrationality of The Square Root of Two – A Geometrical Proof*. The American Mathematical Monthly, vol. 107 (2000), pag. 841.

Courant, R., Robbins, H. *Che cos'è la matematica*. Boringhieri, Torino 1971.

Delucchi, E., Gaiffi, G., Pernazza, L. *Giochi e percorsi matematici*. Springer, Milano 2012.

Sitografia

La torre di [Hanoi](#) 

(Visitato nel luglio 2013)

Torre di [Hanoi](#) 

(Visitato nel luglio 2013)

Anelli [Cinesi](#) 

(Visitato nel luglio 2013)

Questo prodotto multimediale è stato realizzato nel 2013 da INDIRE con i fondi stanziati dal MIUR – Uff. VI nell’ambito del progetto m@t.abel – Apprendimenti di Base. La grafica, i testi, le immagini, l’audio, i video e ogni altra informazione disponibile in qualunque formato sono utilizzabili a fini didattici e scientifici, purché non a scopo di lucro e sono protetti ai sensi della normativa in tema di opere dell’ingegno (legge 22 aprile 1941, n. 633).