Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
MIUR

Angoli e triangoli: mondo reale e funzioni

di S. Beltrame, M. Dalè, R. Ruganti, L. Tomasi

Area tematica

Geometria

Autori

Sylviane Beltrame, Marina Dalè, Riccardo Ruganti, Luigi Tomasi

Ordine di scuola

Scuola secondaria di secondo grado – classe III e IV

Tempo medio per svolgere il percorso

6-8 ore

Indice

Scheda generale

Nucleo

Geometria

Autori

S. Beltrame, M. Dalè, R. Ruganti, L. Tomasi

Tematica affrontata

I triangoli, le funzioni circolari e loro applicazioni.

Descrizione

Studio della trigonometria e delle sue applicazioni, con approfondimento delle funzioni circolari. L'attività può essere proposta nel secondo biennio, quando gli studenti conoscono gli elementi fondamentali di geometria piana, in particolare le similitudini. In alcuni indirizzi di studio quanto presentato di seguito è l'introduzione al percorso, mentre in altri costituisce un consolidamento o un approfondimento (licei scientifici). Prerequisiti necessari per lo svolgimento dell'argomento sono le similitudini nel piano e la conoscenza del concetto di funzione; un utile riferimento per i prerequisiti sono le attività *Ombre e proporzionalità* (PON m@t.abel-Geometria) e *Introduzione al concetto di funzione* (m@t.abel- Relazioni e funzioni). Lo sviluppo dell'attività prevede collegamenti con altre discipline: fisica, astronomia, topografia, geografia, storia dell'arte.

Ordine di scuola

Scuola secondaria di II grado - II biennio - Classe III e classe IV

Tempo medio per svolgere l'attività in classe

Dipende dal tipo di scuola secondaria di II grado: 6-8 ore

Nodi concettuali

- Angolo e sua misura in gradi o radianti.
- Seno, coseno, tangente di un angolo: definizioni, teoremi e applicazioni.
- Funzioni seno, coseno, tangente: rappresentazioni grafiche, teoremi, applicazioni.

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 4 del 16/01/2012, Direttiva n. 5 del 16/01/2012) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni nazionali per i licei

Linee generali e competenze

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei (tre) principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca….

Di qui i gruppi di concetti e metodi di cui lo studente saprà dominare attivamente:

- gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

Liceo artistico: indirizzi arti figurative, architettura e ambiente, design, audiovisivo e multimediale, grafica, scenografia. Liceo classico. Liceo linguistico. Liceo musicale e coreutico: sezioni musicale e coreutica. Liceo scienze umane e liceo scienze umane opzione economico sociale.

II biennio

Obiettivi specifici di apprendimento

[Lo studente] apprenderà le definizioni e le proprietà e relazioni elementari delle funzioni circolari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Liceo scientifico e liceo scientifico opzione scienze applicate

I biennio

Obiettivi Specifici di Apprendimento

Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Linee guida per Istituti Tecnici e Linee guida per Istituti Professionali

Le competenze matematico-scientifiche [Matematica] contribuiscono alla comprensione critica della dimensione teorico-culturale dei saperi e delle conoscenze proprie del pensiero matematico e scientifico. Lo studio della Matematica permette di utilizzare linguaggi specifici per la rappresentazione e soluzione di problemi scientifici, economici e tecnologici e stimola gli studenti a individuare le interconnessioni tra i saperi in quanto permette di riconoscere i momenti significativi nella storia del pensiero matematico.

Anche nel secondo biennio e nel quinto anno gli strumenti indispensabili per l'integrazione tra Area di istruzione generale e Aree di indirizzo sono costituiti grazie alla didattica laboratoriale, come approccio ricorrente, dal laboratorio come strumento di indagine e verifica, dalle esperienze di studio svolte in contesti reali e dalle attività di alternanza scuola-lavoro: esse rappresentano di fatto i "*luoghi"* in cui conoscenze, abilità e competenze, afferenti a discipline diverse possono essere agite in maniera integrata.

Istituti Tecnici:	**Istituti Professionali:**
In particolare,lo studente, durante l'attività laboratoriale,	L'approccio laboratoriale, che può coinvolgere tutte le discipline, attiva processi didattici in cui

applica linguaggi di carattere generale e specifico, raccoglie ed elabora dati per mezzo di idonea strumentazione, costruisce, verifica e confuta modelli, affinandone i processi di adeguamento alla realtà.	gli studenti diventano protagonisti e superano la passività e l'estraneità che caratterizza spesso il loro atteggiamento durante le lezioni frontali. Attraverso processi induttivi, gli studenti sono guidati a riconnettere il sapere acquisito in contesti applicativi al sapere astratto, basato su concetti generali, organizzare i concetti portanti in modo articolato, flessibile e adeguato all'innovazione, al cambiamento, alle esigenze del mondo del lavoro. riproducibile nella più ampia generalità dei casi

Linee Guida Istituti Tecnici e Professionali (Schede disciplinari, Area generale):

La matematica, nell'ambito della programmazione del Consiglio di classe, concorre in particolare al raggiungimento dei seguenti risultati di apprendimento espressi in termini di competenza:

- utilizzare il linguaggio e i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative;
- utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni;
- utilizzare le reti e gli strumenti informatici nelle attività di studio, ricerca e approfondimento disciplinare;
- correlare la conoscenza storica generale agli sviluppi delle scienze, delle tecnologie e delle tecniche negli specifici campi professionali di riferimento.

II biennio

ConoscenzeIl numero π

Teoremi del seno e del coseno. Formule di addizione e duplicazione degli archi.

Abilità

Applicare la trigonometria alla risoluzione di problemi riguardanti i triangoli.

Conoscenze e Abilità in relazione alle indicazioni curricolari sviluppate in questa attività

Conoscenze: gradi e radianti; definizioni di seno, coseno e tangente; teoremi della corda, dei seni e del coseno; grafici delle funzioni goniometriche: seno, coseno e tangente; strumenti di calcolo e loro uso.

Abilità: usare strumenti di calcolo in modo consapevole; utilizzare le diverse definizioni in contesti opportuni, riconoscendo che sono equivalenti; utilizzare software di matematica per tracciare i grafici delle funzioni e le loro trasformazioni elementari; leggere un grafico e coglierne le caratteristiche sia a livello globale sia a livello locale (dominio, periodicità, simmetrie, crescenza e decrescenza, massimi e minimi,etc.); risolvere problemi in contesti significativi e risolubili utilizzando le funzioni circolari.

Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

MIUR

Prove INVALSI

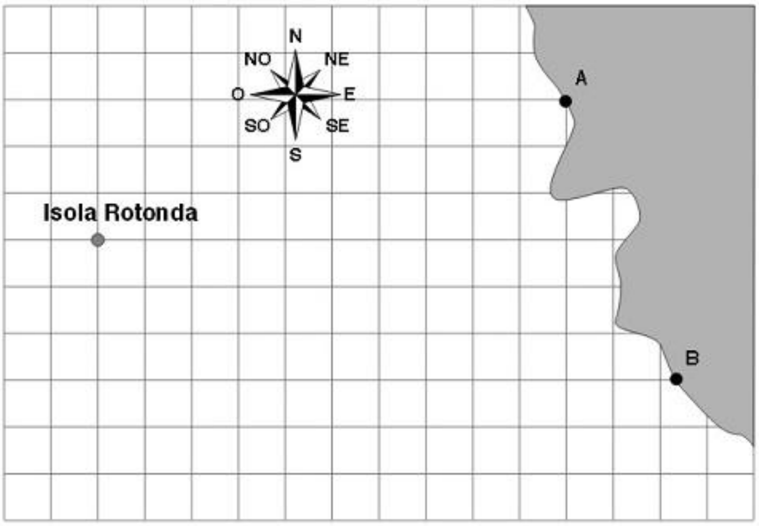
a.s. 2013/2014 - Domanda D3

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D3. Un capitano vede dalla sua nave che il faro A sulla costa si trova esattamente in direzione Nord-Est (NE), mentre il Faro B si trova esattamente in direzione Est (E).

a. Nella seguente mappa segna con un punto la posizione della nave.

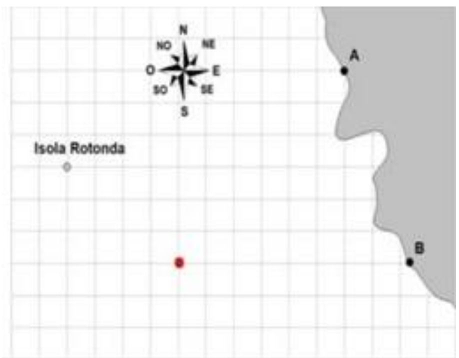


b. Se il lato di ogni quadretto della mappa corrisponde a 1 miglio nautico, qual è la distanza del faro A dall'Isola Rotonda?

A. ☐ 13 miglia nautiche
B. ☐ Dalle 9 alle 10 miglia nautiche
C. ☐ Dalle 10 alle 11 miglia nautiche
D. ☐ 12 miglia nautiche

Soluzione INVALSI

D3_a:



D3_b: C

Commento

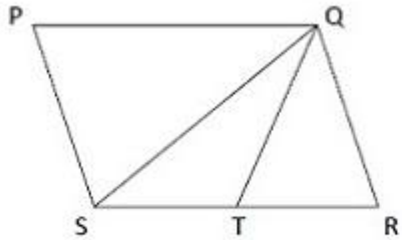
Per rispondere all'item **a.** è sufficiente che lo studente tracci due segmenti, a partire dai punti A e B della costa verso il mare, nel seguente modo: da A lungo le diagonali dei quadrati del reticolato (direzione SO) e da B lungo l'orizzontale (direzione O). Il punto di intersezione dei due segmenti (sufficientemente lunghi da potersi intersecare) indica la posizione della nave (a partire dall'isola rotonda: 4 quadretti verso est e 3 verso sud, come mostrato nella figura che indica la risoluzione). Per rispondere all'item **b.** è invece sufficiente applicare il teorema di Pitagora. La distanza del faro A dall'isola rotonda è infatti uguale alla lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come lunghezze dei cateti 10 quadretti e 3 quadretti (cioè, rispettivamente, nella scala utilizzata, 10 miglia nautiche e 3 miglia nautiche). Per il teorema di Pitagora, quindi la distanza del faro A dall'isola rotonda è data dalla radice quadrata di 109 (miglia nautiche al quadrato),cioè compresa tra 10 e 11 miglia nautiche. alla lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come lunghezze dei cateti 10 quadretti e 3 quadretti (cioè, rispettivamente, nella scala utilizzata, 10 miglia nautiche e 3 miglia nautiche).

a.s. 2013/2014 - Domanda D11

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell’unità.

D11. ***PQRS*** **è un parallelogramma e** ***T*** **è il punto medio di** ***SR*****.**



Qual è il rapporto tra l’area del triangolo ***QST*** **e l’area del parallelogramma?**

Scrivi come hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

....

....

....

Risultato: ....

Soluzione INVALSI: 1/4

Commento

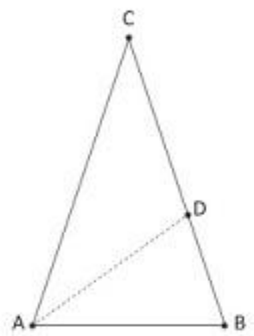
Per rispondere correttamente è sufficiente notare che il triangolo QSR ha area uguale alla metà dell’area del parallelogramma e che l’area del triangolo QST è la metà di quella del triangolo QSR (hanno infatti le basi ST e SR che stanno nel rapporto 1:2 per ipotesi e stessa altezza relativa).

a.s. 2013/2014 - Domanda D23

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D23. Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB. L'angolo in C è la metà dell'angolo in B e AD è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$.



Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	AD è anche l'altezza relativa al lato BC	☐	☐
b.	L'angolo in B misura 72°	☐	☐
c.	L'area del triangolo ADC è il doppio dell'area del triangolo ABD	☐	☐
d.	$AD : AC = BD : AB$	☐	☐

Soluzione INVALSI

a: F

b: V

c: F

d: V

Commento

La proposizione **a.** è falsa: infatti AD non è perpendicolare a BC (l'angolo ADB misura 72°).La proposizione **b.** è vera. Infatti, osservando che:

- il triangolo ABC è isoscele sulla base AB e quindi gli angoli CAB e CBA hanno stessa ampiezza;
- l'angolo ACB ha ampiezza che è metà dell'ampiezza dell'angolo CBA;

- la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°,

indicando con x l'ampiezza dell'angolo ACB si può scrivere l'equazione: $x + 2x + 2x = 180°$ da cui $x = 36°$, quindi l'angolo CBA misura 72°.

La proposizione **c.** è falsa. Infatti i due triangoli ADC e ABD hanno la stessa altezza AH relativa rispettivamente alle basi CD e DB. Affinché l'area di ADC sia il doppio dell'area di ABD dovrebbe essere CD = 2DB, che è falso.

La proposizione **d.** è vera, infatti i triangoli ABC e ABD sono simili (hanno gli angoli interni di uguali ampiezze) e quindi è possibile impostare la proporzione indicata.

Introduzione all'attività

L'attività si struttura in cinque fasi e prevede una ripresa delle unità di misura degli angoli in gradi e in radianti (fase 1), l'introduzione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto (fase2), la loro applicazione alla risoluzione dei triangoli rettangoli e alla risoluzione di semplici problemi legati al mondo reale, i teoremi fondamentali per la soluzione dei triangoli (fase3), la rappresentazione delle funzioni circolari e delle loro caratteristiche principali (seno coseno e tangente) (fase4) e alcune formule goniometriche (fase5).

Fase 1

(Per tutti gli indirizzi)

Gradi e radianti

Prima di affrontare lo studio della trigonometria è opportuno accertare se gli studenti sappiano misurare gli angoli in gradi e in radianti e conoscano la conversione dall'uno all'altro.

In ogni caso può essere utile riprendere l'argomento con particolare riguardo alla lunghezza della circonferenza e al numero π riferendosi alla fase 4 dell'attività "*Superfici comode e scomode* (m@t.abel-PON); e procedere poi con una esperienza "concreta" sul radiante (carta, spago, righello ,ecc.), in cui l'insegnante propone agli studenti, precedentemente divisi in piccoli gruppi, una fase operativa, nella quale invita i ragazzi a disegnare alcune circonferenze con raggio diverso (o a utilizzare oggetti di forma circolare, come tappi di barattoli) e con una cordicella (ad esempio, spago da cucina) a riportare la misura del raggio sulla circonferenza, dagli estremi dell'arco individuato, a tracciare i due raggi e, infine, a confrontare le misure degli angoli ottenuti sui diversi cerchi con un goniometro (è possibile realizzare la stessa esperienza con un orologio circolare da cucina, in questo caso il confronto con la suddivisione del quadrante consente un confronto immediato con la misura degli angoli in gradi).

Attraverso l'esperienza concreta della misura, infatti, essi possono giungere ad individuare il radiante e a dare una effettiva e corretta valutazione numerica alla misura in radianti di un angolo. Nelle fotografie riportate per l'esperienza "concreta" sono stati usati un foglio di carta, un filo, un cuscino piatto e alcuni spilli.Dopo aver tracciato su un foglio una circonferenza e uno dei suoi raggi, si è appoggiato il foglio su un cuscino(piatto e rigido), si è posto uno spillo in corrispondenza del centro della circonferenza e un altro all'estremità di un raggio ed è stato teso il filo fra i due spilli e annodato ai due spilli.

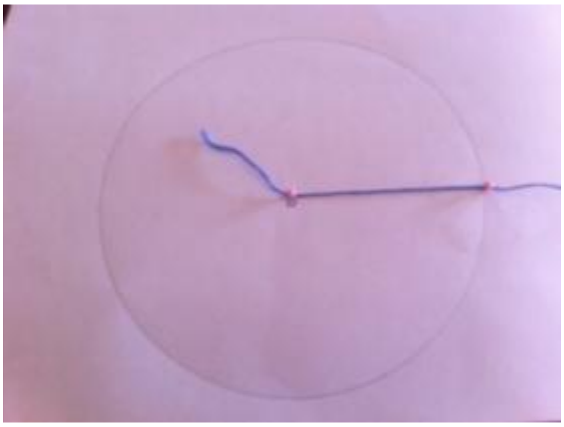


Figura 1

Successivamente si è sfilato lo spillo con il filo dal centro (in cui è stato posto un altro spillo per fissare) e con l'aiuto di altri spilli si è tracciata una traiettoria in corrispondenza della circonferenza (per una maggiore precisione nel far seguire la curvatura al filo), poi si è fatto scorrere il filo al di sotto degli spilli e si è evidenziato il radiante tracciando un raggio in corrispondenza del punto individuato dall'estremità del filo.

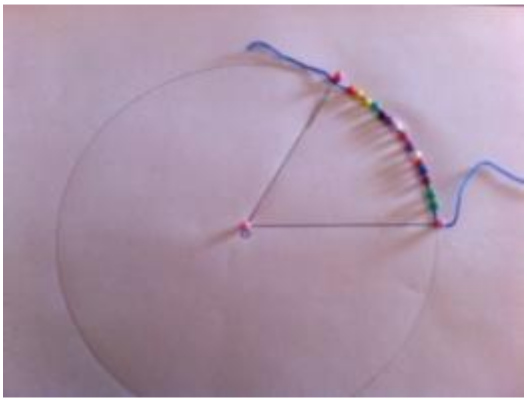


Figura 2

È opportuno riproporre l'attività con un software di geometria dinamica, che consenta di misurare i diversi elementi e di confrontarli. A questo punto gli studenti avranno visualizzato e misurato in gradi l'angolo corrispondente a un radiante. Il docente invita gli allievi alla lettura e all'analisi dei risultati trovati e chiede loro perché di sicuro un angolo di un radiante è minore di 60°, quindi guida una discussione collettiva volta a legare i risultati dell'esperienza percettivo-motoria con le conoscenze pregresse degli studenti.

Fase 2

(Esclusi i licei scientifici - I biennio)

Questa fase porta alla definizione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto, misurato sia in gradi che in radianti, e consente di proporre problemi di risoluzione di triangoli rettangoli in situazioni reali e significative.
Si presentano agli studenti due problemi.

Problema 1

Aristarco di Samo nel III secolo a. C. affronta il problema: "Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante; quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?"
Aristarco non misurava gli angoli secondo il sistema sessagesimale, usando il quale possiamo dire che: il quadrante è un angolo di 90°; un trentesimo di quadrante è un angolo di ampiezza 3°. L'angolo cui si riferisce Aristarco è ampio un quadrante meno un trentesimo, cioè 87° (angolo di vertice A in figura 3)

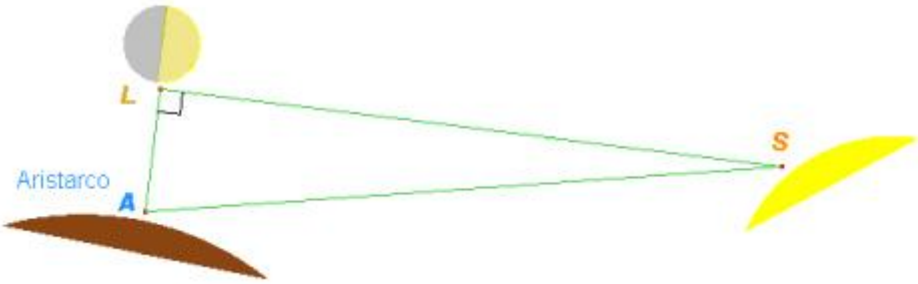


Figura 3

Problema 2

L'altezza delle piramidi può essere calcolata con la trigonometria?

Si propone alla classe il quesito relativo all'altezza di una piramide risolto da Talete e si sottolineano la similitudine e i rapporti costanti fra segmenti corrispondenti (un utile riferimento è l'attività: *Ombre e proporzionalità* m@t.abel-PON, Geometria).

Il docente conduce la riflessione degli studenti per arrivare alla soluzione dei due problemi e alle definizioni di seno, coseno e tangente, ricorrendo alla seguente figura:

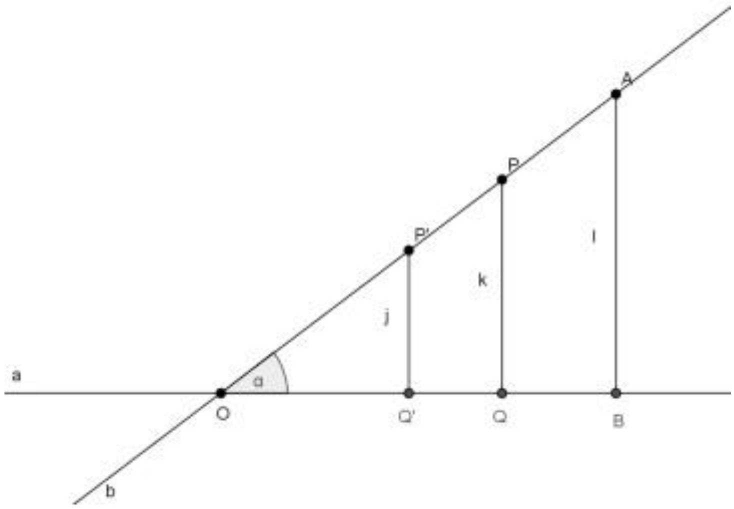


Figura 4

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/arDYfqUC)

L’insegnante fa notare che, dato un angolo acuto AOB (indicato con α), preso sul lato OA un punto P, considerata la proiezione Q di P su OB, i tre rapporti tra i segmenti PQ e OP, OQ e OP, PQ e OQ rimangono costanti al variare di P.

I valori di tali rapporti variano solo al variare dell’angolo α e sono univocamente determinati per ogni sua ampiezza. Si può dunque dire che variano in funzione dell’angolo ovvero che sono funzioni dell’angolo α e sono indicati rispettivamente con senα (o sinα, la scelta della notazione è indifferente, dipende se vogliamo riferirci alla nostra tradizione o alla notazione delle calcolatrici), cosα, tgα.

L’insegnante può anche proporre agli studenti di esplorare la situazione attraverso misure effettuate su carta millimetrata con righello e goniometro o usando un software di geometria dinamica. A questo punto gli allievi, con l’ausilio di una calcolatrice, possono risolvere il problema di Aristarco e quello dell’altezza della piramide di Talete (e tutti i problemi ad esso analoghi in cui si cerca l’altezza incognita di un corpo inaccessibile). Il docente sottolineerà che la conoscenza di queste funzioni consente di risolvere i problemi sui triangoli rettangoli e proporrà alcuni quesiti.

Si possono proporre alcune osservazioni:

- il valore del seno e del coseno di un angolo è sempre minore di 1, perché un cateto è sempre minore dell’ipotenusa;
- il valore della tangente di un angolo non ha limitazioni, perché si ottiene con il rapporto fra due segmenti.

Se il docente lo ritiene opportuno introduce la relazione fondamentale della trigonometria.

Fase 3

(Esclusi i licei scientifici- I biennio)

In questa fase l’insegnante guiderà gli studenti alla “scoperta” dei teoremi dei seni, del coseno (nei triangoli acutangoli), del calcolo dell’area di un triangolo e della corda. L’insegnante, dopo aver suddiviso la classe in piccoli gruppi, propone problemi che consentano di individuare i teoremi fondamentali della trigonometria.

Teorema dei seni

Una nave manda un segnale di SOS; tale segnale viene ricevuto da due capitanerie di porto, poste in linea d'aria alla distanza di 50 km. Le due capitanerie individuano la posizione della nave con gli angoli α= 75° e β= 50°. importante conoscere a quale distanza si trovi la nave per inviare i soccorsi.

È possibile trovare un metodo per calcolare la distanza della nave dalle due capitanerie? Si può proporre agli studenti di cercare in internet alcune carte nautiche e di individuare quali strumenti vengano utilizzati per la loro lettura (troveranno goniometri, compassi ecc.). In rete possono trovare carte nautiche simili a quella di seguito:

Figura 5

Su una carta come questa possono considerare la posizione di una nave come nella seguente figura 6.

Figura 6

La situazione schematizzata nella figura 6, non coincide con quella del problema, inviteremo gli studenti a schematizzare quanto espresso dal testo. Agli allievi sarà, eventualmente, suggerito di dividere in modo opportuno il triangolo ABC, modello geometrico della situazione che viene analizzata, in due triangoli rettangoli.

Ricorrendo a quanto già conoscono riguardo ai triangoli rettangoli, saranno guidati a cercare le relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque, che permetteranno di risolvere la problematica proposta.

Si può proporre la dimostrazione considerando due triangoli congruenti (invece di operare sullo stesso triangolo) per visualizzare meglio i due momenti del procedimento:

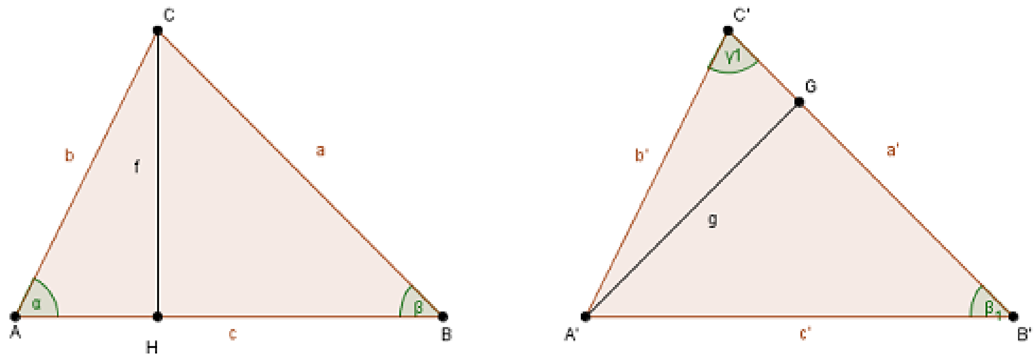


Figura 7

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/KdRcYGFW)

Osservando i triangoli dati, fra loro congruenti, si nota che nel triangolo ABC l'altezza CH può essere ricavata tramite la definizione di seno nei triangoli ACH e CHB, per cui, con pochi passaggi si ottiene che a/senα=b/senβ, considerazioni analoghe si fanno sul secondo triangolo A'B'C' (congruente al triangolo ABC) e sull'altezza A'G, da cui, per le congruenze fra segmenti e angoli si ha c/senγ=b/senβ. Considerando le relazioni ottenute e ricorrendo alla proprietà transitiva si ricava il teorema dei seni nella forma a/senα=b/senβ=c/senγ.

Teorema del coseno

Il docente può proporre agli studenti i seguenti problemi:

1. È necessario realizzare una galleria sotto una montagna. Si suppone che un osservatore conosca a quale distanza si trova rispetto ai due estremi della galleria e l'angolo formato dai segmenti che congiungono la sua posizione con tali estremi. Com'è possibile calcolare la lunghezza della galleria (immaginando che essa sia rettilinea).

2. In una zona montuosa si deve realizzare un viadotto ed è necessario prima di tutto conoscerne la lunghezza. È noto che il viadotto è rettilineo e con la stessa quota in tutti i suoi punti; si conoscono sia le distanze fra un punto a terra e i due estremi del viadotto sia l'angolo fra essi compreso.

Come si può calcolare la lunghezza del viadotto? E la sua altezza?

La seguente foto vuole rappresentare una situazione del tipo di quella del problema 2, anche se nell'immagine il viadotto non è rettilineo.

Figura 8

La situazione è schematizzata nella figura 9:

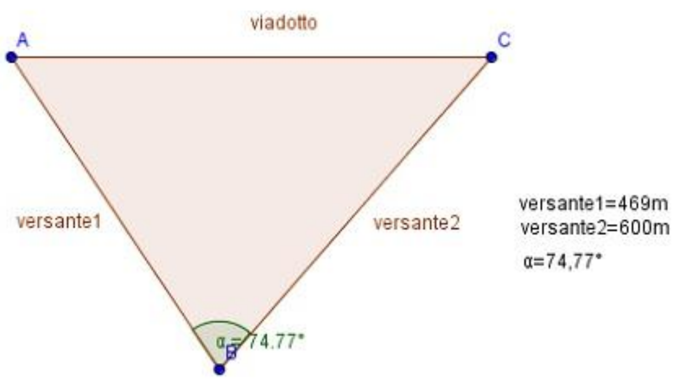


Figura 9

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/KeFrPajR).

Anche in questo caso, modellizzando geometricamente la situazione problematica, e ricorrendo a quanto già conosciuto sui triangoli rettangoli, sarà possibile guidare gli studenti a rispondere alle richieste e successivamente a una generalizzazione che porti all'enunciato del teorema del coseno.Per la dimostrazione si può ricorrere al seguente procedimento.

Si considera il triangolo ABC e si traccia l'altezza BD (Figura 10)

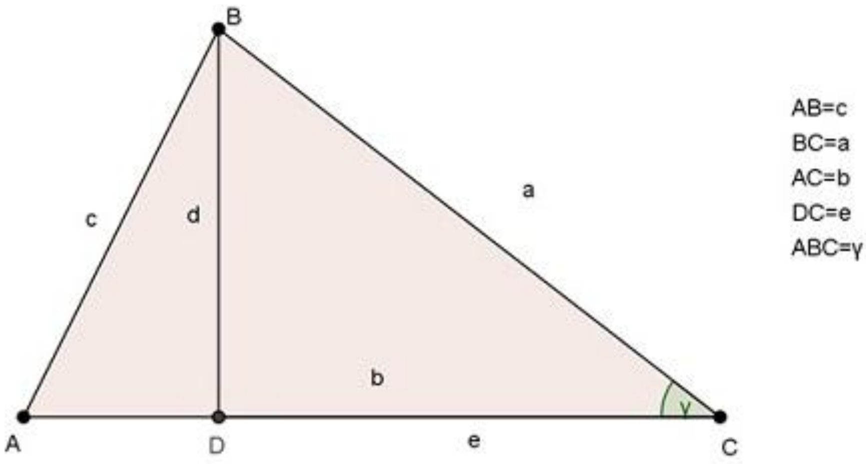


Figura 10

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/gybRdM5m)

Si applica il teorema di Pitagora al triangolo ABD, retto in D e si ottiene $c^2=(b-e)^2+d^2$ (1) , da cui svolgendo i calcoli: $c^2=b^2-2be+e^2+d^2$, ma poiché ,applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BDC, $d^2+e^2=a^2$ ed $e=a \cos\gamma$ (relazioni dei triangoli rettangoli) sostituendo nella relazione (1) si ottiene il teorema del coseno $c^2=b^2+a^2-2ab\cos\gamma$. Teorema che consente di risolvere i problemi posti.

Calcolo dell'area di un triangolo

Si vuole valutare l'estensione di un parco a forma di quadrilatero, almeno in modo approssimato. Si può suddividere il quadrilatero in due (o più) triangoli. Si chiede se sia possibile individuare una strategia che conduca ad una formula con la quale si possa calcolare l'area di un triangolo se sono note le misure di due suoi lati e quella dell'angolo compreso fra di essi.

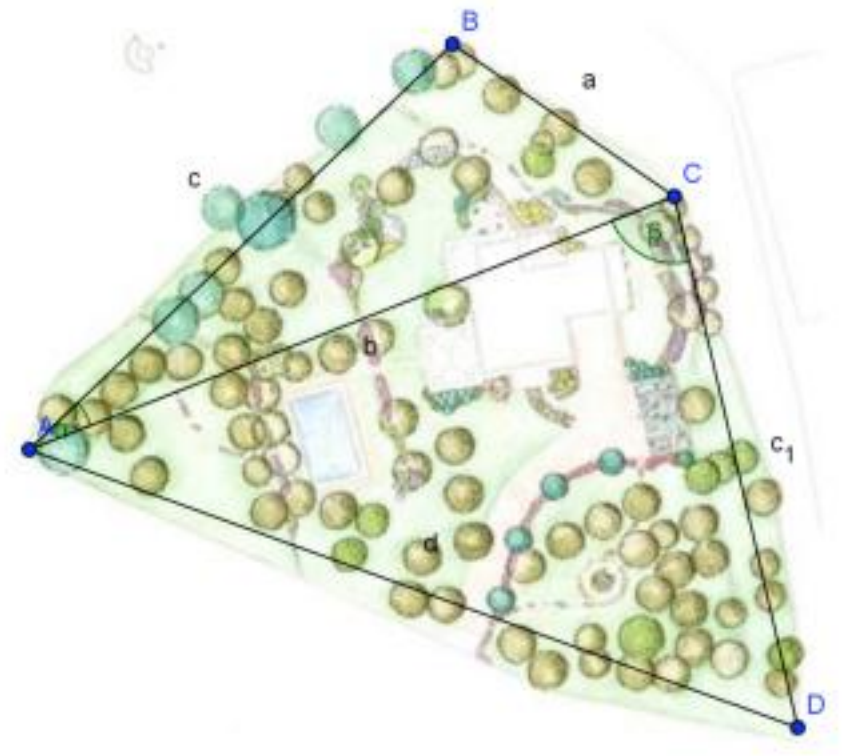


Figura 11

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/ccJhWs3a)

L'insegnante guiderà gli studenti ad osservare che considerando l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AC è il cateto di un triangolo rettangolo e che tale cateto è opposto all'angolo α, l'altezza misura perciò h= c senα. Conoscendo un lato e l'altezza ad esso relativa si calcola l'area del triangolo e si giunge quindi alla formula $S = \frac{1}{2} b\, c\, \text{sen}\alpha$, con la quale si può calcolare l'area cercata (Figura 12).

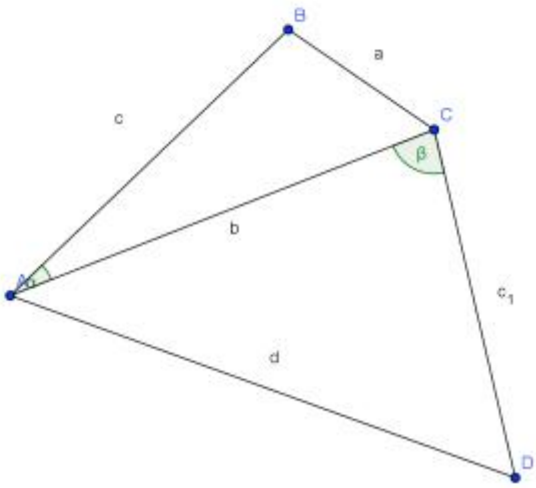


Figura 12

[Scarica il file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/WB7F2XVV)

Teorema della corda

Si possono riprendere i problemi già posti e chiedere agli studenti se, mantenendo costanti l'angolo e la misura del segmento ad esso opposto, si riesca ad individuare un luogo geometrico e se questo consenta di porre in relazione alcuni elementi. Si sottopone agli studenti un problema emerso durante un restauro, la situazione può essere presentata con il testo di seguito riportato.

Nell'abbazia di L. si deve restaurare un portale d'ingresso con colonnine marmoree. A una colonna del portale, manca una parte che è stata tagliata di netto (figura 13). La colonna è a sezione circolare; i tecnici, per poter realizzare la parte mancante, hanno posto il quesito: qual è il raggio della circonferenza della sezione della colonna?

Le misure note sono la lunghezza del segmento visibile (16 cm) e la misura del segmento compreso fra la perpendicolare nel punto medio della corda e l'arco di circonferenza (4 cm).(Le colonne del portale sono simmetriche,ma la simmetrica a questa ha gli stessi problemi e le altre sono tutte diverse fra di loro.)

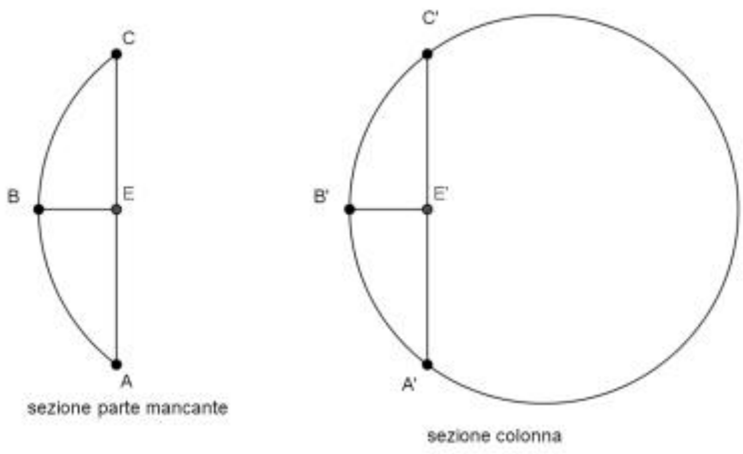


Figura 13

[Scarica il file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/sxQNQ2aT)

La soluzione del quesito è decisamente agevolata dall'uso di un software di geometria.

La figura 13 rappresenta la sezione della parte mancante della colonna, le misure date in relazione ai segmenti sono: AC=16cm e BE=4cm e la sezione della colonna stessa.

La prima soluzione proposta per il problema è stata ottenuta con l'applicazione del secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo B'C'D, (Figura 14): in cui

B'D è il diametro della circonferenza, perché asse della corda C'A', e il triangolo è perciò rettangolo, perché inscritto in una semicirconferenza (i ragazzi dovrebbero ricordare questa proprietà, anche Dante nella *Divina Commedia* la cita: "*o se del mezzo cerchio far si puote triangol / sì ch'un retto non avesse*." Paradiso, XIII, 101-102).

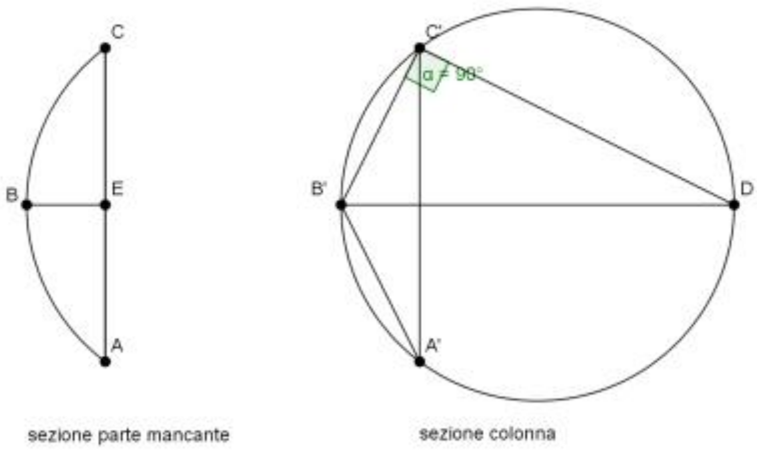


Figura 14

[Scarica il file geogebra]
Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/material/simple/id/Y9cPMXMh).

Successivamente si valuta la possibilità di operare mediante gli angoli per cercare il diametro della circonferenza. I ragazzi possono osservare, in figura 14, che il triangolo rettangolo potrebbe essere risolto con le relazioni note della trigonometria se fossero note le ampiezze degli angoli. Considerando nota l'ampiezza dell'angolo C'DB' si ottiene sen B'DC'= B'C'/B'D, con B'D= 2r, da cui si può ricavare la relazione
B'C'=2r senB'DC'.
Ora bisogna mostrare che questa relazione vale per qualunque triangolo inscritto in una circonferenza. Il passaggio prevede un ragionamento sulla

circonferenza e le sue proprietà. Si considerano il triangolo rettangolo, come nei casi precedenti, e un triangolo acutangolo inscritto nella circonferenza con un lato coincidente con BC (Figura 15).

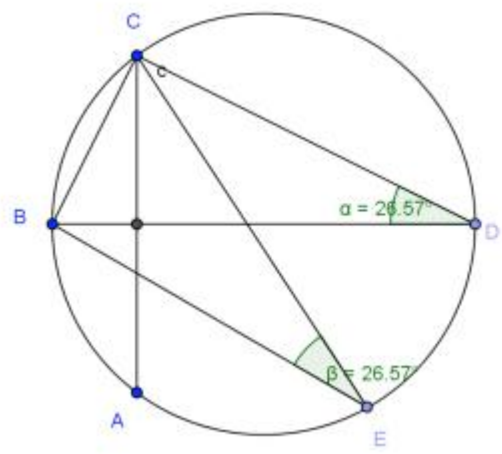


Figura 15

[Scarica il file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/material/edit/id/3158769)

I due angoli α e β sono congruenti, quindi si può scrivere la relazione BC=2r senα dal caso precedente e BC=2rsenβ, per la congruenza dei due angoli, da qui si può generalizzare ed enunciare il teorema della corda. Si considera la figura 16, in cui si evidenziano due triangoli, che insistono sulla stessa corda e si arriva ad enunciare il teorema nella forma: la lunghezza L di una corda AB di una circonferenza è data da L = 2r senα, in cui r è il raggio della circonferenza, α è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda AB e che sono inscritti nell'arco maggiore tra quelli individuati da AB.

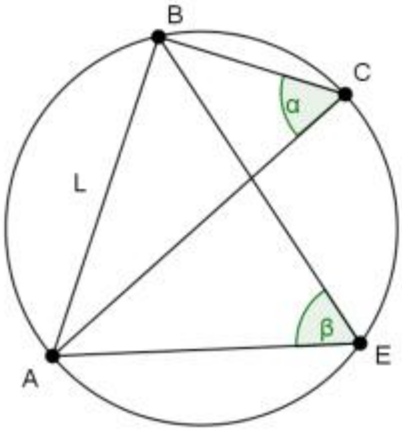
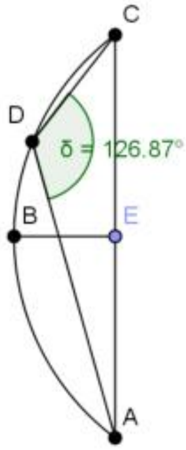


Figura 16

[Scarica il file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/vssSJ2HQ)

Tornando al quesito iniziale i ragazzi osserveranno la difficoltà di risolvere il problema della colonna non potendo conoscere gli angoli acuti α o β. Si considera perciò la possibilità di misurare un angolo sulla parte mancante, per esempio quello che insiste sulla corda AC ma subito si presenta una situazione "nuova": questo angolo è ottuso e deve essere posto in relazione con gli angoli prima considerati.



sezione parte mancante

Figura 17

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/G5KbkK3M)

Si invitano i ragazzi a tracciare l'intera circonferenza:

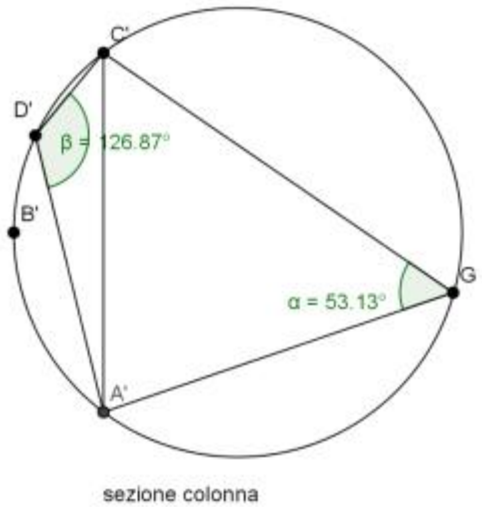


Figura 18

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube

(http://www.geogebra.org/m/RS4wbUjT)

Gli studenti non hanno ancora operato in trigonometria con gli angoli ottusi; per superare questo ostacolo è importante ricordare il teorema che fornisce la condizione affinché un quadrilatero si possa inscrivere in una circonferenza e considerare l'angolo supplementare a quello dato, che, in questo caso, è sicuramente acuto e consente così di concludere il problema con il teorema precedentemente considerato. Si può cogliere l'occasione per calcolare con gli studenti, ricorrendo all'uso della calcolatrice (o a un software), il valore del seno dell'angolo ottuso e far notare che applicare il teorema considerando l'angolo acuto o l'angolo ottuso è indifferente relativamente al risultato; quindi si può concludere che sen(180°-α)=senα, ma perché questo "sia vero" sarà spiegato agli studenti successivamente.

Un'altra situazione problematica può nascere dalla considerazione che con il teorema di Euclide abbiamo lavorato su metà corda, i ragazzi potrebbero osservare che se avessimo considerato la corda intera l'angolo alla circonferenza corrispondente sarebbe raddoppiato, allora quanto varrebbe in questo caso il seno? Il doppio di senα? Gli strumenti di calcolo consentono subito di verificare che sen2α non è 2 senα. Il docente decide se trattare subito questa relazione o se proporla successivamente (fase 5).

Fase 4

(Esclusi i licei scientifici-I biennio)

In questa fase si affronta il problema degli angoli maggiori di 90° e successivamente si introducono la circonferenza goniometrica e la rappresentazione delle funzioni goniometriche. In un primo approccio il docente introduce il problema dell'angolo ottuso, riferendosi in particolare al coseno.

Per mostrare che le funzioni goniometriche assumono valori negativi si può proporre agli studenti un problema con un triangolo ottusangolo, di cui sono note le misure dei lati e si chiede di determinare la misura del coseno dell'angolo ottuso.

Si trova il valore del coseno negativo e questo destabilizza gli studenti, dopo che abbiamo spiegato che il coseno è un rapporto fra segmenti. Per aiutare gli studenti in questo passaggio si procede con l'introduzione del riferimento polare, in cui bisogna individuare la posizione di un corpo rispetto ad un osservatore, per giungere poi alla circonferenza goniometrica (oppure si potrebbe ricorrere ai vettori e alla loro scomposizione, la proposta è condizionata dall'istituto e dal periodo dell'anno scolastico). Il docente propone agli studenti, il seguente disegno:

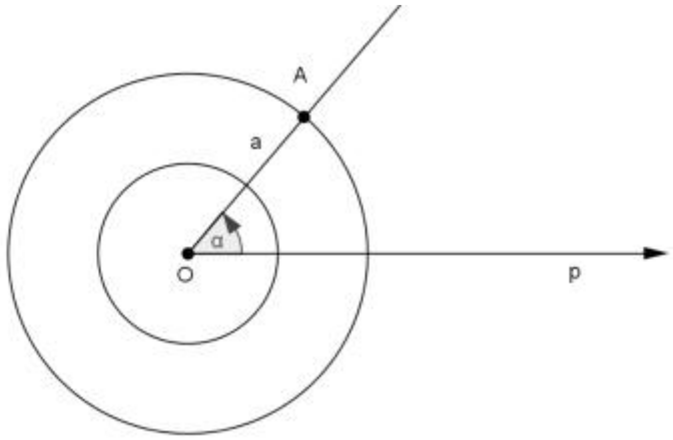


Figura 19

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/jYHqDBWE).

Nel disegno si può facilmente conoscere la posizione del punto A rispetto al punto O con due numeri che si possono leggere sulla figura stessa: la distanza OA che corrisponde al raggio e l'angolo α descritto dalla semiretta a, partendo dalla posizione della semiretta p (come nello schermo di un radar). La posizione del punto viene individuata da due numeri r e α A(r,α), rispettivamente chiamati raggio e anomalia. Il punto O prende il nome di polo e la semiretta p il nome di asse polare.

Per individuare la posizione di un punto in un piano i ragazzi conoscono il piano cartesiano, ora il docente guida i ragazzi a porre in relazione il piano polare e il piano cartesiano.

Riportiamo la figura precedente in un riferimento cartesiano ortogonale (si può notare l'analogia con i punti cardinali, in relazione al discorso del radar):

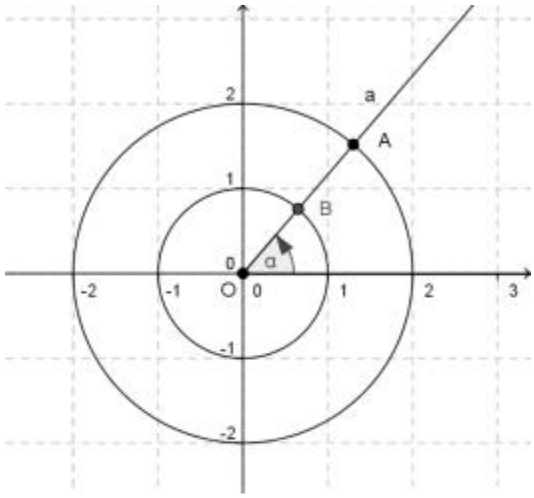


Figura 20

[Scarica il file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/y7Yx5NgG).

Ora gli studenti possono cercare il legame numerico che esiste fra le coordinate del punto A nel piano polare e nel piano cartesiano: nel piano polare le sue coordinate erano indicate con (r,α) e nel piano cartesiano le indichiamo con (x,y). I ragazzi trovano con le relazioni del seno e del coseno in un triangolo rettangolo che x= r cos α e y=r senα; a questo punto li invitiamo a considerare il punto B con coordinate polari (r/2, α) e a cercare anche in questo caso le coordinate del punto nel piano cartesiano. Il confronto fra le coordinate di A e le coordinate di B mostra in modo evidente la loro dipendenza dall'angolo, allora è opportuno ricavare le funzioni seno e coseno e scriverle in un caso generale, ad esempio, preso un punto P(x,y) a distanza r dall'origine si ottiene senα=y/r, con y misura della distanza dall'asse x e cosα=x/r, con x misura della distanza dall'asse y. I passaggi precedenti possono essere proposti in modo più efficace con l'ausilio di un software in cui si considera un piano polare e si mostra dinamicamente ai ragazzi come varino le coordinate polari, i valori delle coordinate del punto corrispondente all'estremo del raggio al variare dell'angolo e i valori del seno e del coseno di angoli diversi e si invitano a compilare la seguente tabella:

punti	Coordinate polari	Coordinate cartesiane	Funzioni goniometriche (seno e coseno)
P	r=1 α=150°	x=-√3/2 y=1/2	cos150°=-√3/2 sen 150°=1/2
Q			

La lettura dell'ultima colonna suggerisce di considerare un piano polare in cui un generico punto abbia coordinate (1,α), r=1. La compilazione della tabella consente di osservare che sono stati considerati tutti gli angoli fra 0° e 360° e che oltre i 360° i valori del seno e del coseno "si ripetono".
Il passaggio alla circonferenza goniometrica è a questo punto abbastanza semplice: si considera la circonferenza di centro O e di raggio unitario e si fissa il verso antiorario come verso positivo per l'angolo. Le relazioni precedentemente trovate x/r=cosα e y/r=senα, ponendo r=1, diventano x=cosα e y=senα.

In questa sede si propone la relazione fondamentale della trigonometria, ricavando i valori del seno e del coseno. Sul grafico si analizza con gli studenti l'orientamento dei segmenti e si giustifica il valore del risultato anche alla luce dei rapporti fra segmenti. Si può procedere anche all'osservazione degli archi associati.
A questo punto ricorrendo ad un software di geometria gli studenti possono individuare le funzioni che si ottengono al variare dell'angolo α.

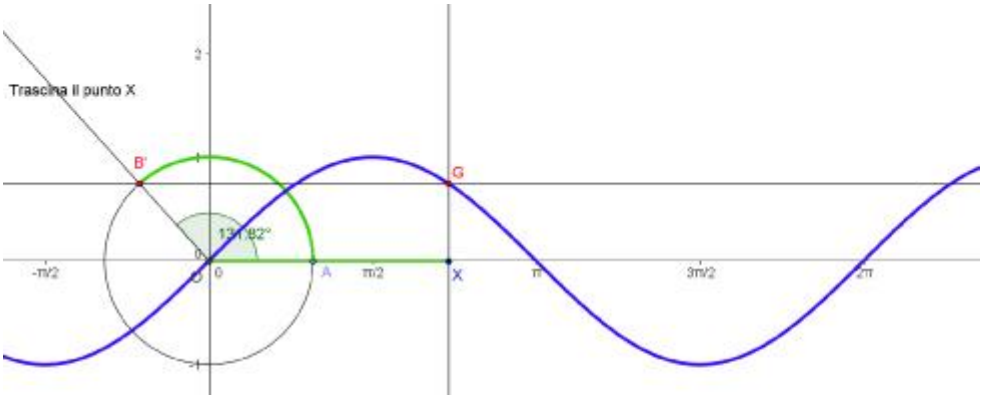


Figura 21

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/material/simple/id/P62xTRET).

La figura 21 evidenzia il grafico della funzione y=senα. Gli studenti osserveranno che la funzione presenta un andamento periodico e valori negativi. Il docente può proporre agli studenti un'analisi descrittiva di questa situazione, riprendendo anche il problema dell'orientamento degli archi, e procedendo ad una analisi della funzione, ricercando in essa alcune delle caratteristiche viste in precedenza (limitazione della funzione, ecc.). Può essere utile riprendere il problema della misura degli angoli, la rappresentazione grafica consente di giustificare la necessità di ricorrere alle misure in radianti e in gradi.

Le funzioni si possono proporre anche ricorrendo alla rete (per esempio sul sito di geogebrawiki).

Fase 5

(Esclusi i licei scientifici - I biennio)

Si propongono agli studenti alcune relazioni "utili" in trigonometria e in altri contesti disciplinari. Esse sono la relazione fondamentale della trigonometria (già proposta), le formule di duplicazione e le formule di addizione e sottrazione.

Relazione fondamentale trigonometria

Si riprende la relazione fondamentale della trigonometria ($sen^2\alpha+cos^2\alpha=1$) ricorrendo ad un triangolo rettangolo in cui si applica il teorema di Pitagora esprimendo i lati in funzione degli angoli.

Formule di duplicazione

La formula di duplicazione si può ricavare considerando la relazione che intercorre fra un angolo al centro e il corrispondente angolo alla circonferenza, applicando il teorema della corda e il teorema del coseno per ricavare la corda stessa.

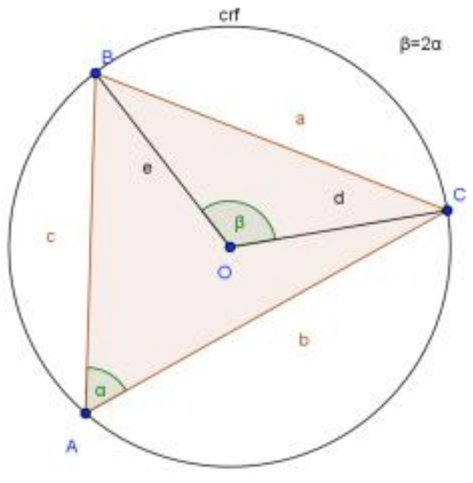


Figura 22

[Scarica il file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/jNQcY4Dw)

Si calcola la corda BC=a applicando il teorema della corda e il teorema del coseno:

a= 2r senα e $a^2=d^2+e^2-2d\cdot e\cdot\cos\beta$, tenendo presenti le relazioni fra gli angoli e i raggi, si ottiene $4r^2\text{sen}^2\alpha=r^2+r^2-2r^2\cos 2\alpha$, con pochi passaggi si ricava $\cos 2\alpha=1-2\text{sen}^2\alpha$, da questa relazione possono ricavare le altre espressioni ad essa equivalenti e il sen 2α con l'applicazione della relazione fondamentale della trigonometria. Il sen 2α può essere ricavato anche con un metodo analogo al precedente, ricorrendo al teorema dei seni; il vantaggio di questo metodo è che evita il problema della scelta dei segni.

Formula di addizione e sottrazione

La formula di addizione e sottrazione si può ricavare ricorrendo ancora una volta alle relazioni sui triangoli rettangoli. Si ricava cos ($\alpha+\beta$) con un metodo che si riferisce ad una proposta di Viète, ripresa da Vaulézard. Prima di tutto si realizza la figura: si disegna il triangolo rettangolo ABC, retto in C, si tracciano: una semiretta internamente all'angolo A, la perpendicolare dal punto B a questa semiretta e si indica con D il punto di intersezione con la semiretta stessa, la retta parallela dal punto D alla retta del lato AC e si indica con E il suo punto di intersezione con il lato BC, la perpendicolare alla retta a cui appartiene il lato AC e si indica con F il punto di intersezione con la retta di AC.

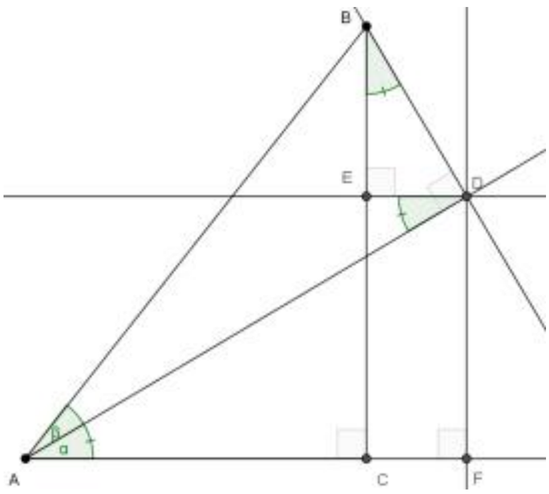


Figura 23

[Scarica il file geogebra](#)
Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/material/simple/id/euWNtmNt)

A questo punto è possibile cercare la relazione cos (α+β): α corrisponde all'angolo CAD, β all'angolo DAB e α+β all'angolo CAB.
Considerando il triangolo rettangolo di partenza per le relazioni fra i lati di un triangolo rettangolo si osserva che: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{AC}{AB}$
Ma l'obiettivo è esprimere questa relazione con le funzioni degli angoli α e β, bisogna perciò procedere con alcune considerazioni geometriche, si osserva che:
$\cos\alpha=\frac{AF}{AD}$, ma AC = AF - CF

perciò possiamo scrivere $\cos(\alpha+\beta)=\frac{AF-CF}{AB}$

e anche $\cos(\alpha+\beta)=\frac{AF}{AB}-\frac{CF}{AB}$

relazione apparentemente priva di legame con gli angoli che ci interessano. Osservando la figura notiamo che: CF=ED (è sufficiente riprendere i teoremi delle rette parallele) e l'angolo DBE=α (DE parallelo a CF tagliato dalla trasversale AD, quindi DAC=EDA; l'angolo in D è retto e quindi si deduce facilmente quanto affermato).
Tenendo presenti le relazioni del seno e del coseno di α e β e considerando la relazione precedente si individuano i segmenti per cui moltiplicare e dividere i termini della differenza, rispettivamente AD e BD:
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AF}{AD}\cdot\frac{AD}{AB}-\frac{CF}{BD}\cdot\frac{BD}{AB}$$
Analizzando i rapporti e tenendo presente che CF è congruente a ED, si ricava la relazione:
cos (α+β)=cosα cosβ-senα senβ.

sen (α+β) si può ricavare ricorrendo al teorema di Tolomeo e considerando le proprietà dei triangoli rettangoli e il teorema della corda. Il teorema di Tolomeo che pone in relazione le diagonali di un quadrilatero inscritto in una circonferenza con i lati (se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti) di solito non viene affrontato a scuola. In questa sede la proposta può rappresentare un'occasione per un approfondimento e una ripresa di contenuti precedentemente studiati, per la dimostrazione si ricorre alle similitudini e alla costruzione di un triangolo opportuno per dimostrare il teorema.

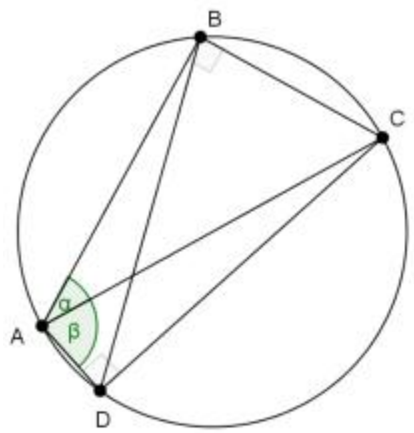


Figura 24

Scarica il file geogebra

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/akVCjFJR).

Si considera il quadrilatero ABCD, inscritto in una circonferenza, in cui la diagonale AC coincide con il diametro e divide il quadrilatero in due triangoli rettangoli.

Il triangolo ABC è rettangolo, applicando le relazioni si ottiene:

AB=2r cosα, BC=2r senα.

Il triangolo ABD è rettangolo, applicando le relazioni si ottiene:

AD=2r cosβ, DC=2r senβ.

La diagonale BD è una corda e si ricava applicando il teorema:

$BD=2r\ sen(\alpha+\beta)$

Il teorema di Tolomeo applicato al quadrilatero ABCD è espresso da:

$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$, da cui, sostituendo le misure dei lati e delle diagonali, si ricava la relazione di addizione.

Indicazioni metodologiche

La proposta vuole focalizzare l'attenzione sugli aspetti significativi di questo argomento, evitando inutili tecnicismi di calcolo, privilegiando la chiarezza concettuale dei contenuti (radiante, definizioni di seno, coseno e tangente, teoremi sulla risoluzione dei triangoli). I problemi presentati per introdurre gli argomenti traggono spunto da tre campi fondamentali, presenti sin dall'antichità, nello studio della trigonometria: le osservazioni e i calcoli astronomici; la definizione delle rotte di navigazione e la costruzione di mappe del territorio mediante il problema della triangolazione.

In tutta l'attività si ricorre a una metodologia laboratoriale, attraverso l'uso di un software di geometria, calcolatrice scientifica, materiale concreto e problemi significativi collegati alla storia della matematica, all'astronomia e al mondo reale, favorendo un apprendimento per scoperta, finalizzato all'acquisizione del significato degli oggetti matematici, in modo da consolidare negli allievi le conoscenze, le abilità e le competenze presenti nelle indicazioni nazionali per il licei e nelle linee guida per gli istituti tecnici e per gli istituti professionali.

Nella introduzione delle funzioni circolari vi è il problema delle diverse definizioni di seno, coseno, tangente (che rimangono frequentemente separate negli apprendimenti degli studenti). Conviene pertanto seguire il percorso didattico con la definizione delle funzioni goniometriche di un angolo acuto, x/r, y/r e l'uso della metafora del radar, (pag. 194, *Matematica 2003).* Solo alla fine di questo percorso si introduce la circonferenza goniometrica.

In questa attività didattica, si intende sottolineare il collegamento tra similitudine (similitudine come prerequisito, vedi *Ombre e proporzionalità*); rapporti e definizioni delle funzioni goniometriche, legame che talvolta si perde nel momento in cui si arriva all'uso della circonferenza goniometrica oppure non emerge per nulla se si considera sin dall'inizio la circonferenza goniometrica.

Si introducono anche alcune formule di trigonometria ricorrendo sempre ad una giustificazione geometrica.

L'attività presenta numerosi collegamenti in rete; si è ritenuto opportuno ricorrere spesso a questo perché in alcune scuole sono presenti progetti che prevedono l'uso di tablet, LIM e pc, o progetti legati all'uso delle tecnologie (progetti web, 2.0 ecc).

Eventuali difficoltà e suggerimenti

Non è facile comprendere la misura degli angoli in gradi e radianti, i rapporti, le proporzioni,le similitudini e le definizioni delle funzioni goniometriche; il passaggio dalla definizione geometrica di una funzione goniometrica alla sua interpretazione come funzione in R.

Il nodo concettuale dell'ascissa e dell'ordinata: gli studenti devono aver sempre presente che il seno e il coseno rappresentano il rapporto tra due misure (di segmenti orientati) e per tale morivo non sono lunghezze, ma numeri puri. Quindi solo in un secondo momento possono identificare seno e coseno con i numeri che esprimono l'ascissa e l'ordinata di un punto sul cerchio goniometrico, ma avendo presente il concetto di rapporto, in cui il denominatore è 1.

L'attività non presenta particolari difficoltà se non quella di condurre opportunamente la discussione in classe con domande che inducano una riflessione costruttiva da parte degli alunni, evitando un apprendimento puramente mnemonico e superficiale.

Spunti per approfondire

Spunti per un approfondimento disciplinare

Approfondimento 1

Le applicazioni della trigonometria

- La topografia e il teodolite

Un campo di applicazione per eccellenza della trigonometria è la topografia (anche alcuni problemi considerati in precedenza sono di topografia). Si possono perciò proporre numerosi problemi di applicazione della trigonometria alla topografia.

Può essere interessante presentare agli studenti il teodolite e le sue applicazioni. Conviene tenere presente che i ragazzi possono disporre di un teodolite anche su uno smartphone, grazie ad applicazioni scaricabili (anche gratuitamente), questo dovrebbe essere uno stimolo per suscitare una maggiore attenzione.

La proposta per l'analisi di questo strumento varia da indirizzo ad indirizzo e può essere affrontata in modo più o meno tecnico o con un approccio che mostri come esso sia stato utilizzato anche in passato.

Sono riportati di seguito alcuni link per elaborare diversi percorsi.

Un'introduzione storica al teodolite può essere favorita dalla proposta della scheda in cui viene presentato lo strumento: http://catalogo.museogalileo.it/approfondimento/Teodolite.html e un video in cui è spiegato il suo funzionamento:
http://catalogo.museogalileo.it/multimedia/TeodoliteAlbrecht.html

Volendo approfondire lo studio delle coordinate azimutali ci si può riferire a: http://www.fis.unipr.it/~albino/documenti/azimutali.html

Per i metodi di rilevamento, reti GPS e metodo della triangolazione:
http://labtopo.ing.unipg.it/files_sito/compiti/METODI%20CLASSICI%20RILEVAMENTO.pdf

http://www.rilievoarcheologico.it/manuale_rilievo8_00005a.htm

Astrolabi e sestanti: http://www.orologimeccanici.com/storia4.asp

- Le applicazioni della trigonometria alla geometria dello spazio.
- La trigonometria e la fisica: i vettori, il moto armonico, le onde e in particolare la rifrazione.

Approfondimento 2

La trigonometria attraversa la storia della matematica e fornisce numerosi spunti di riflessione, si può proporre:

- Una attività sulla storia della trigonometria, anche in relazione alla storia dell'astronomia.
- La trigonometria araba (http://pls.dima.unige.it/pls0409/ftrig/Funzioni%20trigonometriche/925/index.html)
- La misura del raggio terrestre (Eratostene).

Un approfondimento è rappresentato anche dalla dimostrazione della formula di Erone.

Approfondimento 3

- Le coordinate polari e le equazioni delle curve.
- La trigonometria e i numeri complessi.

Spunti per altre attività con gli studenti

- Costruzione di un teodolite
- Scoprire la prima legge di Snell in: *Le leggi di Snell e la riflessione delle immagini*
- Costruzione di un modello fisico per collegare il concetto di allineamento di tre punti con l'esperienza visiva di tre spilli e una costruzione geometrica per individuare, con la geometria analitica, le condizioni per

l'allineamento di tre punti nel piano cartesiano in: *La matematica aiuta a descrivere la rifrazione:spilli, semicorde e seni* ,

- Analisi di un cronotachigrafo.

Elementi per prove di verifica

1. Valutare sen6 –sen6°.
2. Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro in modo da toccarlo ad un'altezza di 3,6 m. Quale angolo forma la scala con il pavimento ? … e con il muro?
3. Calcolare il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'area è 48 cm^2 e il seno di un angolo acuto è 4/5.
4. Due persone si trovano alla distanza di 2 km l'una dall'altra e vogliono determinare a quale distanza si trovi un campanile che vedono in lontananza. Con il teodolite vengono misurati gli angoli, indicando con A e B le due posizioni, la persona in A misura un angolo di 50° e la persona in B di 60°. Come possono procedere per misurare a quale distanza si trova il campanile da ognuna delle due posizioni? (problema che si riferisce a come determinare la distanza di un punto inaccessibile).
5. Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore a quello della latitudine del luogo (trovandosi Roma alla latitudine di 41°, il pannello dovrà essere inclinato di 31°). A che altezza dal pavimento della terrazza arriverà la sommità del pannello?
6. Quando una strada sale di 20 m, su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Quanto vale l'angolo di inclinazione della strada (rispetto all'orizzontale)?
7. Supponiamo che in un triangolo sia $a^2+b^2>c^2$, riconoscere se questo triangolo è acutangolo, ottusangolo o rettangolo?

8. Si vuole, dalla spiaggia, stimare la distanza di un faro posto su un isola in mezzo al mare. Come si può fare?
9. Questo disegno rappresenta l'Eurotunnel che attraversa il Canale della Manica, possiamo calcolare la pendenza della risalita in Francia e in Inghilterra?

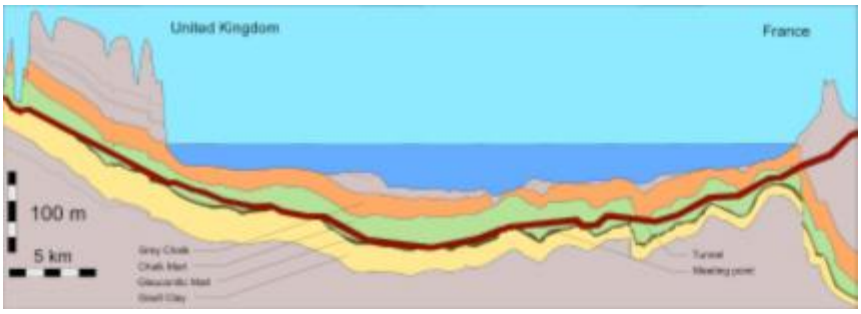


Figura 25

Per la soluzione si può proporre ai ragazzi: di ricavare le misure dallo schema proposto, di studiare l'immagine con un software di geometria o di visionare un filmato sull'eurotunnel, in cui si spiegano le caratteristiche del tunnel, la costruzione e sono date le misure.

10. Due ragazzi salgono su una ruota panoramica che ha un diametro di 16 m e gira tre volte al minuto, con il punto più basso a 1m dal terreno. Si assuma che l'altezza dei ragazzi dal terreno sia funzione sinusoidale del tempo, dove t=0 corrisponde al punto più basso della ruota. Calcolare a quale altezza rispetto al suolo si trovano i due ragazzi dopo un certo intervallo di tempo. Tracciare il grafico che rappresenta la posizione in funzione del tempo. (Il problema si trova in rete: soluzione http://www.youtube.com/watch?v=P0Omw-NVUkw&feature=relmfu, grafico della funzione: http://www.youtube.com/watch?v=nMUzQFurRLI&feature=endscreen&NR=1)

Figura 26

http://www.youtube.com/watch?v=nMUzQFurRLI&feature=endscreen&NR=1

11. Viene ritrovata la lunetta, riportata in figura 26, priva di una parte. Non si capisce se la lunetta sia stata realizzata considerando come riferimento una circonferenza. Esiste una strategia che ci consente di calcolare l'eventuale raggio della circonferenza? Si può risolvere il problema con l'ausilio di un software?
12. Una nave è trainata in porto da due rimorchiatori che esercitano entrambi una forza di intensità 106N; sapendo che i cavi formano angoli di 30° e di 46° con la retta coincidente con l'asse di simmetria della nave, determinare la forza risultante con cui viene trainata la nave.

Esami di stato

13. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

    (Esame di stato-sessione suppletiva 2011, Liceo scientifico: corso di ordinamento e corso PNI , quesito 1)

14. Si provi che non esiste un triangolo *ABC* con *AB* = 3, *AC* = 2 e ABC= 45° Si provi altresì che se *AB* = 3, *AC*= 2 e ABC=30°, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

    (Esame di stato 2010, Liceo scientifico: corso di ordinamento e corso PNI , quesito 9)
15. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

    (Esame di stato 2007, Liceo scientifico: corso di ordinamento, quesito 2)

Test di ammissione all'Università

16. La funzione y=(cosx)/(senx) ha periodo: a)π; b)π/3; c)π/2; d)π/4; e)2π

    (Prova di ammissione al corso di laurea in scienze motorie, a.a. 2011/2012)
17. L'angolo π/4 corrisponde a: a)45°; b) 120°; c) 90°; d) 180°; e) 36°

    (Prova di ammissione al corso di laurea in scienze motorie, a.a. 2008/2009)
18. Consideriamo la funzione f(x)=sin(x)+cos(2x) definita per ogni x reale. Determinare quale delle seguenti affermazioni relative alla funzione f(x) è FALSA.

1. Non si annulla mai.
2. Non assume valori maggiori di $\sqrt{5}$.
3. Non assume valori minori di -3.
4. È periodica.
5. f(π)=1.

(Prova unica di ammissione al corso di laurea magistrale in medicina e chirurgia e in odontoiatria e protesi dentaria, a.a. 2011/2012).

19. L'equazione tg(x)=$\sqrt{3}$ ha per soluzioni:

1. x=π/3+kπ con k variabile in Z.
2. x=π/6+kπ con k variabile in Z.
3. x=-π/3+2kπ con k variabile in Z.
4. x=π/6+2kπ con k variabile in Z.
5. x=π/4+kπ con k variabile in Z.

(Prova di ammissione ai corsi di laurea delle professioni sanitarie, a.a. 2011/2012).

20. Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?
1. Cos(arccos(x))=x.
2. Sen(arcsen(x))=sen(x).
3. Cos(arcsen(x))= sen(x).
4. Cos(arcos(x))=cos(x).
5. Cos(arcsen(x))=x.

21. Se α=15°, la sua misura in radianti è: a) $\pi/12$; b) $\pi/24$; c) $5\pi/12$; d) $\pi/30$; e) $\pi/15$.

(Prova di ammissione ai corsi di laurea delle professioni sanitarie, a.a. 2010/2011).

22. Si consideri la funzione y=senx (x esprime l'ampiezza degli angoli in radianti). I valori della funzione sen1, sen2, sen3, e sen4, disposti in ordine crescente risultano:
1. sen4, sen3, sen1, sen2;
2. sen4, sen3. sen2, sen1;
3. sen1, sen2, sen3, sen4;
4. sen2, sen1, sen4, sen3;
5. sen3, sen4, sen2, sen1.

(Prova di ammissione al corso di laurea in medicina veterinaria, a.a. 2007/2008).

Risorse

Bibliografia

Castelnuovo, E., Gori Giorgi, C., Valenti, D. *Matematica oggi 2.* La Nuova Italia, Firenze 1992.

Freguglia, P. *La geometria tra tradizione e innovazione. Temi e metodi geometrici nell'età della rivoluzione scientifica 1550-1650*. Bollati Boringhieri, Torino 1999.

Grugnetti, L., Villani, V. [a cura di] *La matematica dalla scuola materna alla maturità*. Pitagora, Bologna 1999.

Mancini Proia, L. [a cura di Menghini, M., Trabalza, M. R.] *Geometrie in cielo e in terra.* Arquata, Foligno 2003.

Villani, V. *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica*. Pitagora, Bologna 2006.

Sitografia

Matematica2003

(Visitato nel luglio 2013)

Khanacademy

Sito non specifico per trigonometria, versione in inglese per eventuali CLIL

(Visitato nel luglio 2013)

Canale You tube Khanacademy italiano

(Visitato nel luglio 2013)

Questo prodotto multimediale è stato realizzato nel 2013 da INDIRE con i fondi stanziati dal MIUR – Uff. VI nell'ambito del progetto m@t.abel – Apprendimenti di Base.