Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
MIUR

Complessi ma semplici

di M. Pedone, S. Rossetto, S. Zoccante

Area tematica

Numeri

Autori

Marcello Pedone, Silvano Rossetto, Sergio Zoccante

Livello scolastico

Scuola secondaria di secondo grado

Ordine di scuola

Secondo biennio. Classe IV.

Tempo medio per svolgere il percorso

8 - 10 ore

Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

MIUR

Sommario

Scheda generale

Riferimenti curricolari

Liceo Scientifico

Obiettivi specifici di apprendimento

Aritmetica e Algebra.
Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

Istituti tecnici e professionali

Conoscenze
Unità immaginaria e numeri complessi.

Abilità
Operare con i numeri complessi.

Argomento non esplicitamente previsto nei Licei diversi da quello scientifico e in alcuni indirizzi degli Istituti Tecnici e Professionali.

Introduzione

Attività 1: Ricerca delle soluzioni di un'equazione di 2°, 3° e 4° grado. Note storiche, forma algebrica dei numeri complessi.

Attività 2: Il piano di Gauss e interpretazione geometrica dei numeri complessi. Operazioni fra numeri complessi e visualizzazione nel piano con *GeoGebra*.

Attività 3: Vettori e forma trigonometrica. Interpretazione della somma e del prodotto.

Attività 4: Visualizzazione delle radici dell'equazione $x^2 + ax + b = 0$, con a, b numeri reali o complessi. Cenno al Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Attività 1

Descrizione

Si propone di iniziare l'argomento con un quadro storico sull'origine dei complessi. Ciò consente di far percepire la matematica come una disciplina che cambia nel tempo. Seguendo la storia, le operazioni tra numeri complessi saranno introdotte dal punto di vista algebrico, in stretta connessione con le usuali regole del calcolo algebrico. Non si insisterà su espressioni complicate, e al momento non si approfondirà lo studio di potenze e radici, che saranno trattate nell'ambiente più favorevole della rappresentazione goniometrica.

Fase 1

L'insegnante propone alla classe le seguenti pagine di storia della matematica (rielaborazione da *Matematica* 2004, pagine 36-38), e poi le commenta con gli studenti.

Dalle equazioni ai numeri complessi

La risoluzione di equazioni è una parte fondamentale della matematica dal punto di vista storico.

La nascita dell'algebra classica si può collocare nel XVI secolo. All'inizio del Cinquecento in Italia il Rinascimento è in pieno sviluppo; anche la matematica occupa un posto di rilievo in questo emergere di nuove idee. È da ricordare in proposito la notevole concentrazione di eminenti matematici italiani e stranieri presso l'Università di Bologna, dove, a breve distanza di tempo, insegnarono

Luca Pacioli, Scipione Dal Ferro, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli e numerosi altri. La fama di tali maestri attirava centinaia di allievi da oltralpe.
La risoluzione delle equazioni di secondo grado con il metodo di "completamento del quadrato" era nota sin dai tempi dei Babilonesi. In Euclide questi problemi sono affrontati sotto forma geometrica (nel libro II degli *Elementi*). L'equazione cubica, se si eccettuano dei casi particolari, aveva fino ad allora sfidato i matematici. Nella soluzione delle equazioni di terzo grado si erano cimentati molti matematici greci e arabi fin dai tempi di Archimede, ma essi erano arrivati solo a risolvere casi particolari, senza riuscire a trovare un metodo generale.

Scipione Dal Ferro (1465-1526), professore di matematica a Bologna, riuscì a risolvere le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ intorno al 1500; egli però non pubblicò il suo metodo risolutivo in quanto in quel periodo le scoperte venivano spesso tenute nascoste per poi sfidare i rivali a risolvere lo stesso problema. Tale metodo fu rivelato dallo stesso Scipione Dal Ferro, poco prima di morire, ad un suo allievo, Antonio Maria Fior.

Anche Tartaglia (soprannome di Nicolò Fontana, 1500?-1559), sembra in modo indipendente, aveva trovato un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + px = q$ e $x^3 + px^2 = q$ con p e q positivi. Nel 1535 fu organizzata una sfida matematica tra Fior e Tartaglia. Ognuno dei contendenti propose 30 problemi che l'avversario doveva risolvere. Tartaglia risolse tutti i 30 problemi proposti da Fior, mentre Fior non riuscì a risolvere nemmeno uno dei 30 posti da Tartaglia. La notizia della brillante vittoria di Tartaglia nella sfida raggiunse Girolamo Cardano (1501-1576). Tartaglia, date le insistenze di Cardano, finì per rivelargli il suo metodo, in cambio della solenne promessa di Cardano di mantenere tale metodo segreto. Nonostante questo impegno Cardano pubblicò la sua versione del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado nella sua opera *Ars Magna* (Norimberga 1545). La formula risolutiva delle equazioni di quarto grado fu scoperta da Ludovico Ferrari (1522-1565). Anche queste formule furono pubblicate nell'*Ars Magna* e Cardano attribuì a Ferrari il metodo.

Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri fu Rafael Bombelli (1526-1573), matematico bolognese. Bombelli nella sua opera *L'Algebra*, il cui titolo completo è *L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (composta verso il 1560, ma stampata in parte solo nel 1572), raccolse e completò i risultati ottenuti in campo algebrico della prima metà del Cinquecento da diversi matematici; si propose cioè di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso *irriducibile.*

Nell'*Algebra*, Bombelli si occupò del calcolo con potenze e con radici e di equazioni algebriche. A lui si deve fra l'altro l'introduzione degli esponenti per indicare le potenze dell'incognita. Nel libro I dell'*Algebra* Bombelli prese in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama "*quantità silvestri*", e giunse ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo "complessi". Introdusse i termini *più di meno* e *meno di meno*, per indicare + *i* e - *i*, che abbreviava nelle scritture *pdm* e *mdm*.

Bombelli stabilì le leggi formali di calcolo dei nuovi numeri, successivamente chiamati *immaginari* da Cartesio, per indicare soluzioni considerate fittizie e irreali, né vere (positive) né "surde" (negative). Nell'*Algebra* troviamo la corretta trattazione di alcune equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, Dal Ferro e Tartaglia, portano a radicali doppi che coinvolgono quantità non reali.

È interessante notare che, storicamente, i numeri complessi non furono introdotti per trovare soluzioni delle equazioni di 2° grado con discriminante negativo. Tali equazioni non destavano nei matematici alcun interesse, in quanto rappresentavano la traduzioni analitica di problemi geometrici o di altra natura privi di soluzioni reali. I numeri complessi nacquero, invece, ai fini della risoluzione di equazioni di 3° grado: in alcuni casi, un procedimento nel corso del quale compaiono numeri complessi permette di arrivare a soluzioni reali dell'equazione data. In altre parole, all'inizio i numeri complessi non erano visti come un nuovo ambiente, ma come un mezzo per ottenere soluzioni reali. Bombelli ha il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le corrispondenti regole di calcolo, oltre a quello di aver svolto una teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo e risolvendo tutti i casi che si possono presentare, mentre Cardano e Ferrari non svilupparono una teoria completa.

Dopo Tartaglia e Cardano per quasi due secoli si studiarono le equazioni di 5° grado e di grado superiore, ma tutti i vari tentativi fatti per risolverle in modo analogo a quelle di 2°, 3° e 4° grado non portarono ad alcun risultato generale. Nel 1799, nella sua tesi di laurea, Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) dette una prima dimostrazione del *teorema fondamentale dell'algebra*:
Ogni equazione algebrica di grado n (con $n > 0$) ha almeno una radice nel campo complesso, sia nel caso in cui i coefficienti sono reali sia nel caso più generale in cui i coefficienti sono complessi.
Naturalmente, una volta trovata l'esistenza di una radice, si può pensare di applicare il teorema di Ruffini e quindi di "abbassare" il grado, ottenendo un'equazione di grado $n-1$; questa equazione ammette a sua volta una radice. Si procede così, fino a concludere che l'equazione di partenza ammette n radici in campo complesso (contando le radici con la loro molteplicità).

Tuttavia, dopo i lavori di Gauss, rimaneva aperta la questione se era possibile risolvere "per radicali" le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. La risposta venne data da Paolo Ruffini (1765-1822) e Niels H. Abel (1802-1829) in uno dei più celebri teoremi della matematica (detto di Ruffini-Abel):

per n>4 non si può fornire, in generale, una formula risolutiva per radicali delle equazioni algebriche.

I numeri complessi sono stati originariamente introdotti per risolvere le equazioni algebriche di 3° grado, ma sono stati poi ampiamente usati nelle applicazioni, in particolare in fisica e in ingegneria. Un ingegnere elettrotecnico americano di origine tedesca, Charles P. Steinmetz (1865-1923), alla fine dell'Ottocento sviluppò la teoria delle correnti alternate basandosi sui numeri complessi. Perciò è stato detto che Steinmetz "ha prodotto elettricità tramite i numeri complessi".

Fase 2

Nella Fase 1 si è accennato al motivo per cui Cartesio ha chiamato questi numeri *immaginari*. Si comprende, quindi, perché, nell'Ottocento, gli altri numeri siano stati chiamati *reali*. Storicamente, quindi, prima è nato il termine *numeri immaginari* e poi, più di due secoli dopo, quello di *numeri reali*. Nell'insegnamento, tuttavia, lo studio, almeno intuitivo, dei numeri reali precede quello dei numeri complessi.

Come sappiamo, l'insieme **R** dei numeri reali, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione, possiede le proprietà che lo rendono un *campo*, cioè un corpo commutativo (che richiameremo in dettaglio nella Fase 3); è inoltre dotato di una *relazione d'ordine* che è compatibile con tale struttura algebrica, ed è *continuo*. Tutte queste proprietà permettono di risolvere in **R** una vastissima classe di problemi affrontati nella scuola secondaria superiore e oltre.

L'insieme **C** dei numeri complessi costituisce un *ampliamento algebrico* di **R**: in **C** riusciamo a definire le operazioni di addizione e moltiplicazione e, inoltre, troveremo soluzioni per equazioni come $x^2 + 1 = 0$, che non ammettono alcuna soluzione in **R**.

La più semplice rappresentazione di un numero complesso è quella detta *algebrica*: ***z* = *x* + *i y***. Spieghiamo questa rappresentazione (il che significa, in termini più rigorosi, spiegare che cosa sono i numeri complessi).
Il numero *i* è definito come un numero che elevato al quadrato dà −1; il numero *i* non può essere un numero reale (ogni numero reale, elevato al quadrato dà un numero positivo o nullo) e per questo è detto *unità immaginaria*. I due numeri reali *x* e *y* sono rispettivamente detti *parte reale* e *coefficiente della parte immaginaria* del numero complesso considerato. Il prodotto *iy* è detto *parte immaginaria* di *z*; talvolta si indica come *parte immaginaria* direttamente il numero reale *y.*

È utile definire anche il numero complesso *coniugato* di un numero $z = a + ib$: si tratta di quel numero complesso, indicato con $\bar{z}$, che ha la stessa parte reale di *z* e parte immaginaria opposta: $\bar{z} = a - ib$.

Infine, possiamo già introdurre ora il concetto di modulo: dato un numero complesso $z = a + ib$, si chiama *modulo* di *z* e si indica con $|z|$ il numero reale non negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Esercizio

Considerando il numero complesso *z* = 2+3*i*	
• Indica la parte reale	
• Indica il coefficiente della parte immaginaria	
• Scrivi il suo complesso coniugato	
• Trova il suo modulo	
• Trova il suo modulo del suo complesso coniugato	

Fase 3

L'insegnante introduce le operazioni in **C**. Allo scopo propone semplici esempi di somme, sottrazioni, moltiplicazioni tra numeri complessi: fa osservare che si vuole che per queste operazioni continuino a valere le proprietà note, cioè quelle che stanno alla base delle usuali regole del calcolo algebrico. Invita quindi gli studenti a eseguire i calcoli, seguendo tali regole e ricordando il significato di *i* (si vedano al riguardo le *indicazioni metodologiche*). Qualche attenzione in più va dedicata al calcolo dell'inverso moltiplicativo e del quoziente tra due complessi.

Si giunge così alla definizione delle operazioni di addizione e moltiplicazione e alla verifica delle relative proprietà.

Addizione: $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$ (legge di composizione interna a **C**)

Questa operazione ha le seguenti proprietà:

- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro $(0+i0)$ che si indica con il simbolo **0**.
- Ogni elemento $z=a+ib$ ammette in **C** un "simmetrico" rispetto all'addizione ($-z=-a-ib$) che si chiama opposto di $z=a+ib$

Moltiplicazione: $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$ (legge di composizione interna a **C**)

Questa operazione ha le seguenti proprietà:

- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro $(1+i0)$ che si indica con il simbolo **1**.

- Ogni elemento ***z = a+ib*** , con *a* e *b* non contemporaneamente nulli, ammette in **C** un “simmetrico” rispetto alla moltiplicazione, che si chiama reciproco o inverso di ***a+ib***, dato da

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{\bar{z}}{z\times\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}$$

Osservazioni.

Se $z = 0+i$, si ha $z \cdot z = z^2 = i^2 = -1$.

In generale, considerando il prodotto di z con il suo coniugato, si ha $z\cdot\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$.

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all’addizione: **(*u*+*v*)·*z* = *u*·*z*+*v*·*z***

Con queste operazioni e proprietà, l’insieme **C** risulta un *campo*. La ***sottrazione*** in **C** è introdotta grazie alla presenza dell’opposto di ogni numero complesso. La ***divisione*** in **C** è introdotta grazie alla presenza del reciproco di ogni numero complesso (non nullo). La scrittura $\frac{a+ib}{c+id}$ (con c e d non entrambi nulli) indica il prodotto $(a+ib)\times\frac{1}{c+id}$.

Analogie e differenze tra **R** *e* **C***.*

Con le operazioni di addizione e moltiplicazione **R** e **C** sono entrambi campi, con le stesse proprietà elencate in precedenza, ma *in* **C***non è possibile definire alcuna relazione di ordine compatibile con la struttura algebrica di* **C**. Infatti, in un campo ordinato, il quadrato di un qualunque elemento (diverso da 0) è positivo. Tuttavia $i \cdot i = -1$ e quindi −1 dovrebbe essere positivo; ma, ovviamente, anche $(-1) \cdot (-1) = 1$ è positivo. E allora avremmo due numeri opposti, +1 e −1, entrambi positivi.

Si noti, tuttavia, che il discorso precedente si riferisce al caso in cui consideriamo **C** con le due operazioni di addizione e moltiplicazione (come campo); se ci limitassimo all'addizione (cioè considerassimo **C** solo come gruppo), allora sarebbe possibile un ordinamento anche dei numeri complessi. La rappresentazione algebrica dei numeri complessi permette anche di definire la potenza di un numero complesso, ma tale rappresentazione si rivela scomoda per questa operazione, e ancor di più se si affronta il problema di trovare le radici di un numero complesso.

Esercizio

Considerati i due numeri complessi z_1 e z_2	
• Calcola la somma dei due numeri	
• Verifica la proprietà commutativa dell'addizione	
• Calcola il prodotto tra z_1 e z_2	
• Verifica la proprietà commutativa della moltiplicazione	
• Verifica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione nel caso $i \cdot (z_1 + z_2)$	
• Calcola la differenza tra z_1 e z_2	
• Calcola $\lvert z_1 - z_2 \rvert$	
• Calcola il quoziente tra z_1 e z_2	

Attività 2

Descrizione

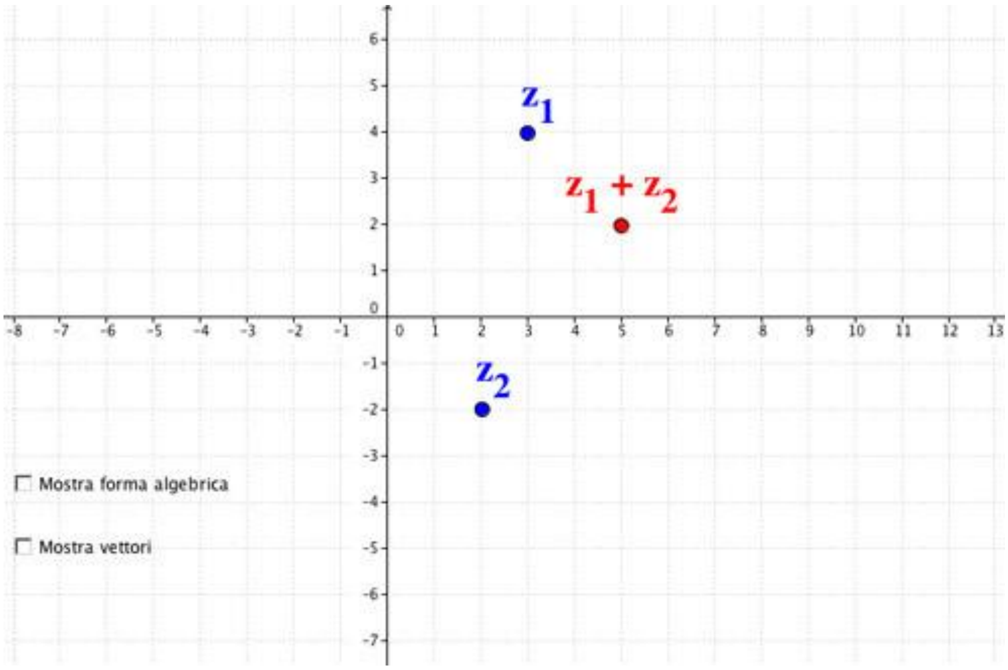
La rappresentazione geometrica nel piano di Argand-Gauss permette di vedere i numeri complessi in un altro modo: si tratta di un'estensione della rappresentazione dei reali sulla retta numerica. Dal punto di vista dello sviluppo della matematica, il passaggio fu di estrema fecondità. Ci limiteremo a considerare l'interpretazione geometrica delle operazioni di addizione e moltiplicazione. Sarà utile il supporto di un software di geometria dinamica, come le applet usate nell'attività. Il punto di arrivo di questa parte sarà una rivisitazione dell'addizione come somma di vettori (del piano) e della moltiplicazione come roto-omotetia.

Fase 1

La somma di due numeri complessi sul piano cartesiano

Introduciamo la rappresentazione dei numeri complessi nel piano cartesiano. L'uso dell'applet, prodotta con il software libero *GeoGebra* , consente all'allievo di esplorare operativamente i concetti introdotti. L'esplorazione sarà guidata da alcune domande.

La figura interattiva rappresenta due numeri complessi (in blu) e la loro somma (in rosso) nel piano cartesiano.



[Scarica il file geogebra]

Attivando e disattivando il pulsante **Mostra forma algebrica** si visualizza/nasconde la forma algebrica dei numeri complessi.

La forma algebrica mostra in modo evidente che la rappresentazione di un numero complesso sul piano (detto di Argand-Gauss, i due matematici che lo hanno introdotto) è il punto del piano cartesiano che ha come ascissa la parte reale e come ordinata la parte immaginaria del numero complesso.

Usando la forma algebrica si osserva facilmente che, come si è detto nell'attività 1, la somma di due numeri complessi ha per parte reale la somma delle parti reali dei due addendi e per parte immaginaria la somma delle loro parti immaginarie.

Il pulsante **Mostra vettori** visualizza i vettori associati ai punti, e quindi ai numeri complessi, rappresentati nel piano. Si noti che questi vettori sono *sempre applicati nell'origine*. Con questo pulsante attivato si riconosce che la somma di due numeri complessi corrisponde alla somma di due vettori come viene definita, ad esempio, in fisica. La regola del parallelogramma, che viene usata per la somma dei vettori, è visualizzata attivando il pulsante **Mostra parallele**.

Esercizio

Usa la figura dinamica muovendo i punti z_1 e z_2 per rispondere alle domande che seguono.

- Se $z_1 = (0, 0)$, dove si trova la somma? Prova a spostare z_2.
- Se z_1 e z_2. sono entrambi sull'asse reale (ascisse), cioè sono numeri reali, com'è la somma?
- Se z_1 e z_2. sono entrambi sull'asse immaginario (ordinate), cioè sono numeri immaginari puri, com'è la somma?
- Fissato z_1, ad esempio $z_1 = 2+3i$, come deve essere z_2. perché la somma sia reale? Oppure perché sia un numero immaginario puro?
- Fissato z_1, ad esempio $z_1 = 2+3i$, chi è il suo opposto z_2. (tale che $z_1 + z_2 = 0 + 0i = 0$)?

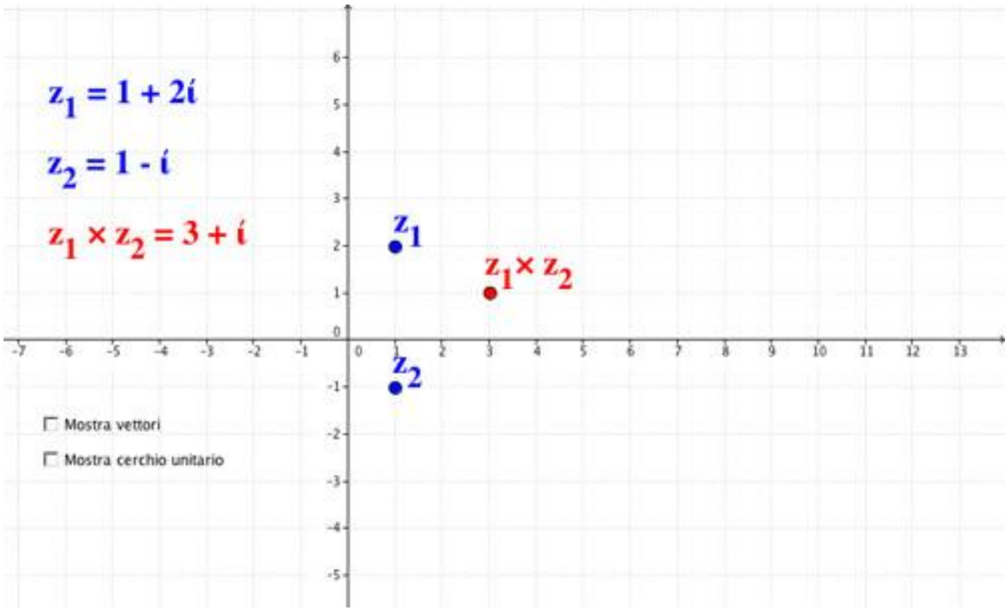
Fase 2

Il prodotto di due numeri complessi sul piano cartesiano

Nel piano di Argand-Gauss il significato geometrico della somma di due numeri complessi risulta di immediata comprensione, in particolare se gli studenti hanno una precedente esperienza con i vettori, ad esempio attraverso la fisica. Il significato geometrico del prodotto è invece più nascosto. Procederemo allora in due passi: il primo con un'esplorazione analoga a quella della somma, guidata da alcune domande, il secondo introducendo il modulo e l'angolo del vettore.

I passo

La figura interattiva rappresenta due numeri complessi (in blu) e il loro prodotto (in rosso) sul piano cartesiano.



Scarica il file geogebra

Ricordando la definizione algebrica del prodotto di due numeri complessi, si può verificare in qualche caso che la rappresentazione è corretta.

Ad esempio: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$,

allora $z_1 \cdot z_2 = (1 \cdot 3) - (2 \cdot (-2)) + [(1\ ´\cdot (-2)) + (3 \cdot 2)]\ i = 7 + 4i$.

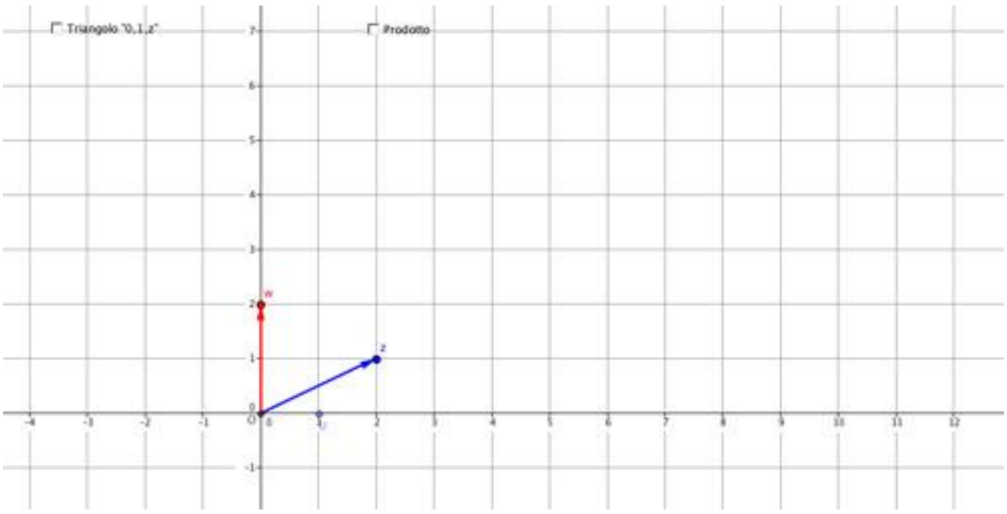
Rispondi alle seguenti domande muovendo i punti su z_1 e z_2 sulla figura dinamica.

- Se $z_1 = (1, 0)$, dove si trova il prodotto? Prova a spostare z_2.
- z_1 e z_2 sono sulla griglia (hanno entrambi coordinate intere), dove si trova il prodotto?

- Se z_1 e z_2 sono entrambi sull'asse reale (ascisse), cioè sono numeri reali, com'è il prodotto?
- Se z_1 e z_2 sono entrambi sull'asse immaginario (ordinate), cioè sono numeri immaginari *puri*, com'è il prodotto?
- Se z_1 è reale e z_2 è immaginario puro, com'è il prodotto?
- Fissato z_1, ad esempio $z_1 = 2+3i$, come deve essere z_2 perché il prodotto sia reale? Puoi ridurre la scala della finestra (ampliando in questo modo l'intervallo del piano cartesiano) tenendo premuto il tasto Maiuscolo (o Ctrl) e agendo sulla rotellina del mouse. Puoi anche spostare la regione osservata trascinando il mouse con il tasto Ctrl + tasto sinistro del mouse premuti.
- Attiva il controllo **Mostra cerchio unitario**. Se poni z_1 e z_2 vicino al cerchio unitario, dove si trova il prodotto?

II passo

La relazione tra i fattori e il prodotto è traducibile graficamente con una rotazione ed una omotetia entrambe con centro nell'origine del piano cartesiano. La figura dinamica di questa pagina si propone di dare una prima intuizione della proprietà enunciata, che verrà affrontata in modo rigoroso con la trigonometria nell'attività 3.



Scarica il file geogebra

Attivando il controllo **Prodotto** compaiono il prodotto $p = z \times w$ dei due numeri complessi e il corrispondente vettore, come nella figura precedente.

Possiamo ora attivare il controllo **Triangolo** dopo aver disattivato il controllo **Prodotto**.

Vengono visualizzati il triangolo di vertici [(0, 0), (1, 0), *z*], che possiamo indicare con [0 1 *z*], e la sua immagine nella rotazione di un angolo retto (in verso antiorario); si noti che l'angolo retto è l'angolo formato dal vettore corrispondente a *w* con semiasse positivo delle ascisse.

In particolare, il punto (0, 0) rimane fisso (centro della rotazione), il punto *U* (1, 0) va in *U'* sul segmento(O, *w*), e *z* in *z*'. Possiamo mettere in evidenza gli angoli formati dai vettori *z* e *w* con l'asse reale.

Si osservi come cambia la figura al variare di *z* o di *w* nel piano.

Si attivi ora il controllo **Omotetia**. Vengono disegnate la retta *OZ'* e la retta parallela al lato *U'Z'* del triangolo ruotato. Le due rette si intersecano nel punto p. I triangoli [0 1 *z*] e [0 *w* p] sono simili perché si corrispondono nella composizione di un'omotetia con una rotazione (roto-omotetia). In particolare, se indichiamo con $\overline{Op}$ la lunghezza del segmento *Op*, tenendo conto che *OU* ha lunghezza 1, per la similitudine possiamo scrivere $\overline{Op} = \overline{Oz} \cdot \overline{Ow}$.

A questo punto osserviamo che la lunghezza del segmento Oz, corrispondente al numero complesso z, è il *modulo* di *z*: infatti, per il teorema di Pitagora, se

$z = a + ib$, la lunghezza del segmento *Oz* è $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

E' inoltre evidente, per la costruzione, che l'angolo formato dal vettore p con l'asse delle ascisse è la somma degli angoli corrispondenti ai due numeri complessi z e w. L'angolo formato da un vettore con il semiasse positivo delle ascisse si chiama argomento (talvolta anche anomalia) del numero complesso associato al vettore.

Attiviamo ora nuovamente il controllo **Prodotto**: si può constatare che il punto ottenuto con la roto-omotetia coincide con il numero complesso risultato del prodotto.

La dimostrazione di questo fatto verrà proposta nell'attività 3.

Attività 3

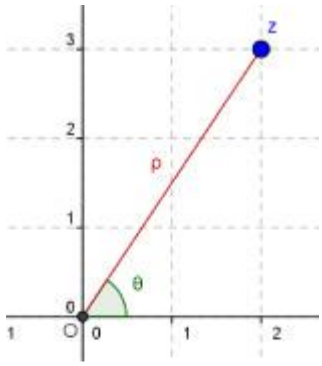
Descrizione

L'interpretazione geometrica vista nell'attività 2 permette di passare con naturalezza alla rappresentazione goniometrica. Si farà uso di tale rappresentazione per approfondire lo studio dei prodotti e delle potenze di un numero complesso. Per le radici rinviamo agli *Approfondimenti*.

Fase 1

Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

Vogliamo ora approfondire le idee sviluppate nell'attività precedente.



Tenendo conto della figura, invitiamo gli studenti ad osservare che, dato il numero complesso $z = \overrightarrow{OP} = x + iy$, indicato con ρ il suo *modulo* $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e con θ il suo *argomento*, risulta:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere il numero complesso nella forma trigonometrica: $z = \overrightarrow{OP} = x + iy = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + \sin\theta)$

Osserviamo poi che, mentre il modulo ρ è univocamente determinato, l'argomento θ è determinato *a meno di un multiplo* (*intero*) *di* 2π. Come già visto in trigonometria, conviene accettare angoli negativi e angoli maggiori di un angolo giro: in quest'ottica, un angolo retto (in un certo verso) è uguale alla somma di 5 angoli retti nello stesso verso, o alla somma di 3 angoli retti nel verso opposto.

Esercizio

Scrivi in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi *e rappresentali* nel piano di *Gauss*	
$z = 1 + i$	
$z = 1 - i$	
$z = 1$	
$z = -1$	
$z = i$	
$z = -3i$	
$z = 1 + 2i$	ρ = ... θ = arctan 2
$z = 1 - 2i$	
$z = -3 - 2i$	
$z = -3 + 2i$	

Fase 2

Riprendiamo ora in considerazione il prodotto z di due numeri complessi $z1$ e $z2$.

Scriviamoli in forma goniometrica $z1 = \rho1(\cos \theta1 + i \sin \theta1)$ e $z2 = \rho2(\cos \theta2 + i \sin \theta2)$; il prodotto può essere scritto come

$z = z1 \cdot z2 = \rho1(\cos \theta1 + i \sin \theta1) \cdot \rho2(\cos \theta2 + i \sin \theta2) = \rho1\ \rho2 \cdot (\cos \theta1 + i \sin \theta1) (\cos \theta2 + i \sin \theta2)$.

Infine, ricorrendo alle formule di addizione per seno e coseno, otteniamo $(\cos \theta1 + i \sin \theta1) (\cos \theta2 + i \sin \theta2) = \cos(\theta1+\theta2) + i \sin(\theta1+\theta2)$.

In conclusione abbiamo $z = z1 \cdot z2 = \rho1\ \rho2 \cdot [\cos(\theta1+\theta2) + i \sin(\theta1+\theta2)]$.

E questo conferma quanto già osservato: nel prodotto si *moltiplicano* i moduli e si *sommano* gli argomenti.

Analogamente, il risultato della ***divisione*** tra due numeri complessi, con $z_2 \neq 0$, espressi in forma trigonometrica, è: $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + i\, sen(\theta_1 - \theta_2)]$ quindi si deve fare il *quoziente* tra i moduli e la *differenza* tra gli argomenti.

Esercizio

Dopo aver rappresentato in forma trigonometrica i due numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$ **e** $z_2 = 1 + 2i$, ***rappresentali*** **nel piano di** ***Argand-Gauss*****, poi calcola e rappresenta:**	
• la somma dei due numeri complessi	
• il prodotto tra i due numeri complessi	
• la differenza tra i due numeri complessi	
• il quoziente tra i due numeri complessi	

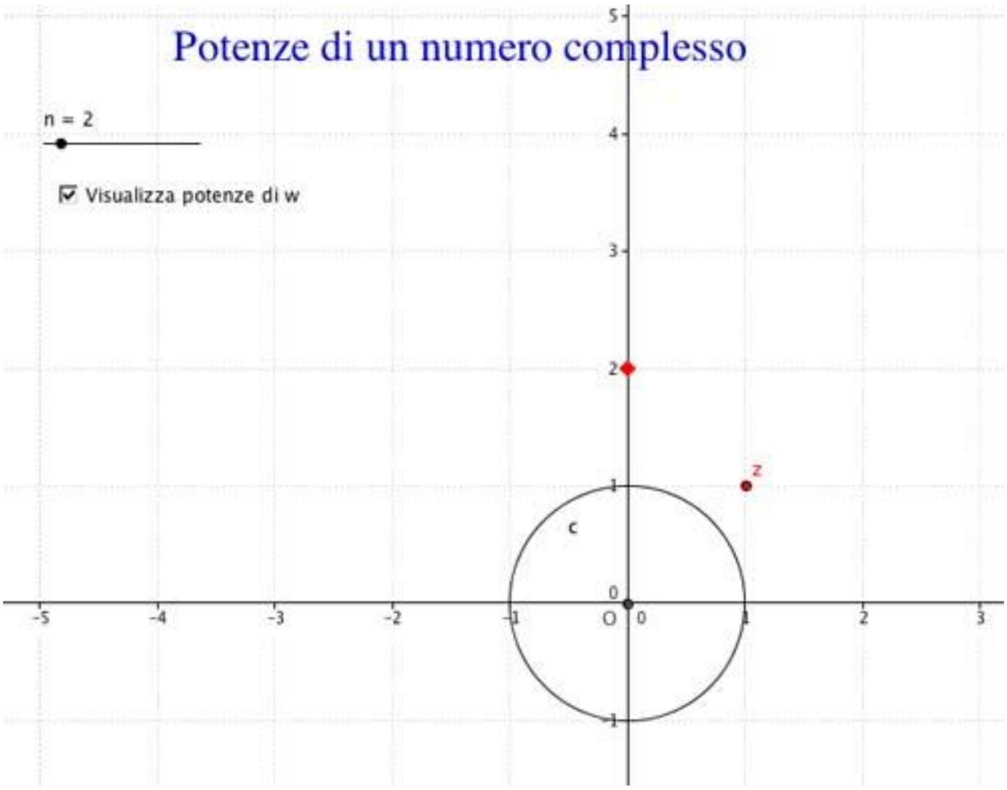
Fase 3

Quadrato e radici quadrate di un complesso

La formula trovata per il prodotto di due complessi porta subito alla formula del *quadrato di un complesso*:

$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$.

Facciamo osservare l'effetto *roto-omotetia* in questo caso: l'argomento *raddoppia* e il modulo appare *al quadrato*.



[Scarica il file ***geogebra***]

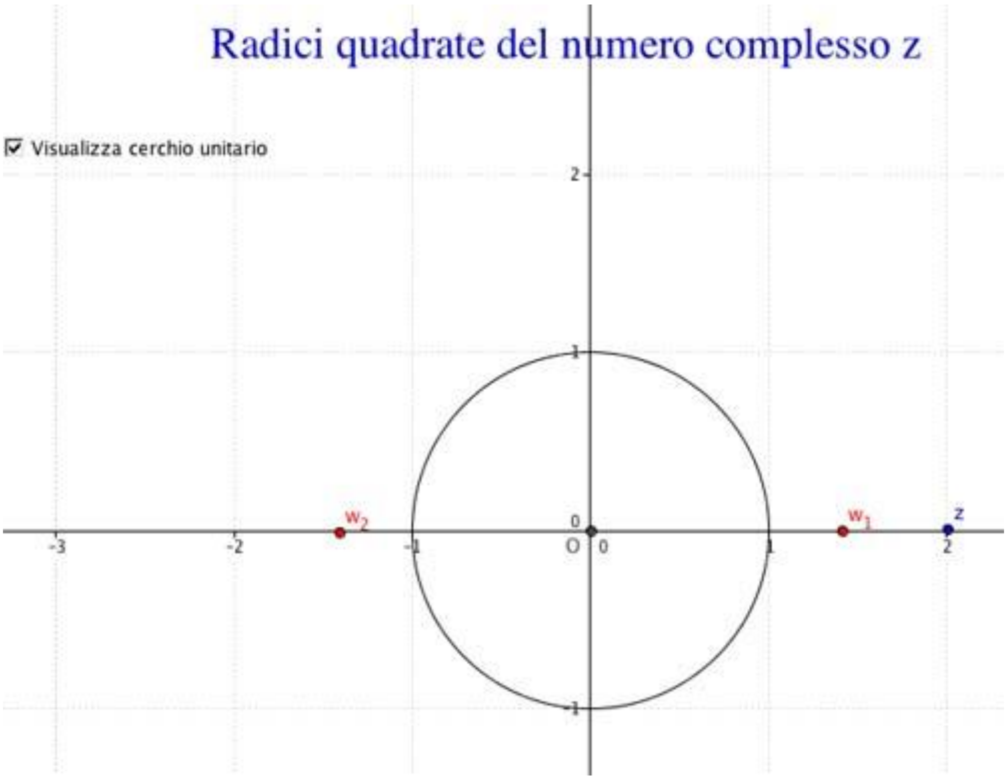
Si può osservare il comportamento del quadrato (e, volendo, anche delle potenze successive). Si noti in particolare la posizione del quadrato quando *z* si avvicina o si allontana dal cerchio unitario.

Si può generalizzare la formula del quadrato ed ottenere quella per il calcolo *della potenza* di un numero complesso *z* con esponente intero. La formula, detta di De Moivre (Abraham De Moivre, 1667-1754), è la seguente

$$w = z^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\right]$$

La formula del quadrato suggerisce anche come ottenere le radici quadrate: una radice quadrata di z è data da $w_1 = \sqrt{\rho}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$, ma non è l'unica radice, in quanto, per le note proprietà delle funzioni goniometriche, lo è anche

$w_2 = \sqrt{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right)$, come si prova elevando al quadrato il numero w_2. Geometricamente le due radici risultano sempre opposte l'una all'altra.



[Scarica il file ***geogebra***]

Dal punto di vista algebrico, risulta poi che tutte le equazioni di secondo grado a coefficienti complessi ammettono sempre due soluzioni complesse, che si ottengono con l'usuale formula risolutiva del secondo grado.

L'attività può proseguire con l'*approfondimento disciplinare n.1*, che tratta le radici *n*-sime di un numero complesso.

Attività 4

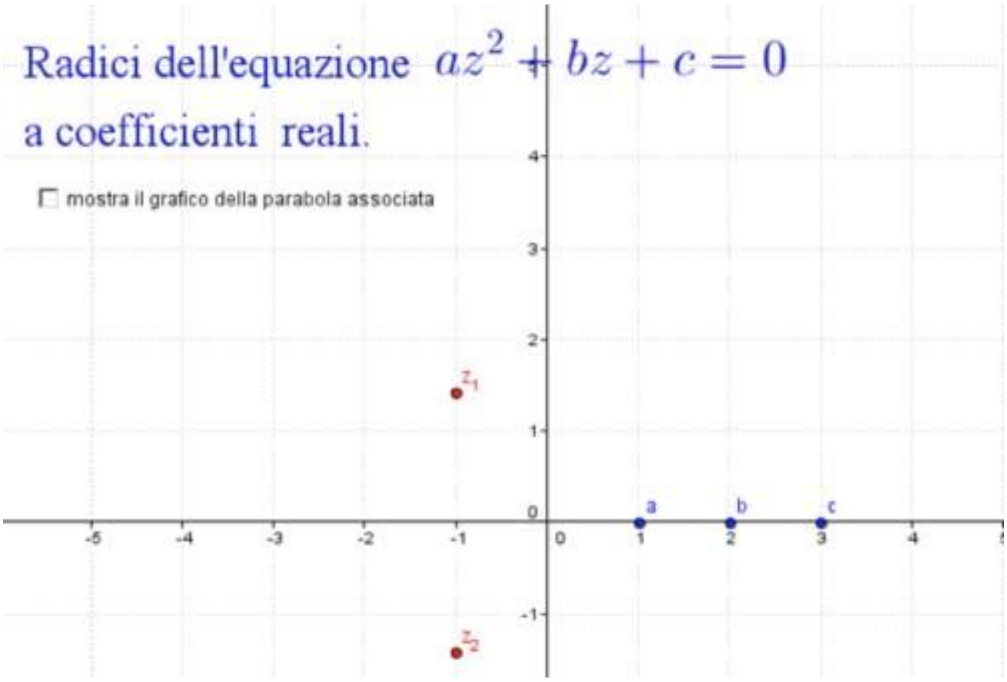
Descrizione

Un'interessante applicazione della rappresentazione vista nella precedente attività si presenta con lo studio delle soluzioni dell'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, sempre mediante un applet. Come successiva estensione, si concluderà l'argomento con un'esposizione informale del teorema fondamentale dell'algebra, e con una discussione sulle conseguenze relative alla fattorizzazione dei polinomi e alle soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti reali.

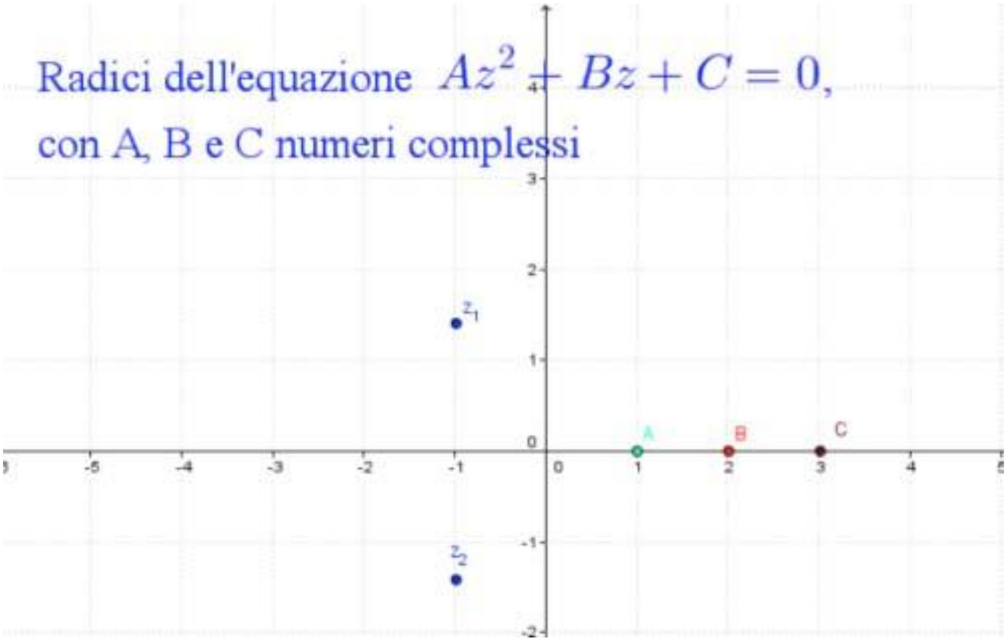
Fase 1

Equazioni di secondo grado

Sappiamo già che le equazioni polinomiali di secondo grado a coefficienti reali *non sempre hanno soluzioni reali*; hanno però soluzioni complesse, come conseguenza della possibilità di determinare le radici complesse di numeri reali negativi, come visto nell’attività precedente. Si propone un'esplorazione delle soluzioni complesse di una equazione a coefficienti reali, e poi a coefficienti complessi;



[Scarica il file *geogebra*]



[Scarica il file *geogebra*]

Per semplificare l’esplorazione senza perdere di generalità, si consiglia di porre *a* = 1 e di far variare separatamente *b* e *c*. All'inizio conviene esaminare casi semplici, come *b* = 0 oppure *c* = 0. Si consiglia anche, nel caso di coefficienti reali, di osservare il legame con la parabola associata.

Ecco alcune domande che possono guidare l’esplorazione in entrambi i casi.

Esercizio

Data la seguente equazione di incognita complessa $Az^2 + Bz + C = 0$, per quali valori dei coefficienti	
• Le soluzioni sono entrambe reali?	
• Le soluzioni sono entrambe complesse?	
• Una soluzione è uguale a 0?	
• Le soluzioni sono entrambe uguali a 0?	
• Le soluzioni sono entrambe uguali a 1?	
• Le soluzioni sono entrambe uguali a $-i$?	
• Una soluzione è i e l'altra $-i$?	
• La soluzioni sono simmetriche rispetto all'asse reale?	
• La soluzioni sono simmetriche rispetto all'asse immaginario?	
• Trovare valori dei coefficienti in modo che una soluzione sia reale e l'altra complessa	

Fase 2

Il teorema fondamentale dell'algebra

L'attività della fase 1 illustra come *ogni equazione di secondo grado* abbia *sempre* due soluzioni (a volte coincidenti), reali o, più in generale, complesse. Si tratta di un caso particolare di un risultato più generale, noto come **teorema fondamentale dell'algebra** (a cui si è già fatto cenno all'inizio)**:**

Ogni equazione polinomiale di grado n, a coefficienti complessi o reali, ha ***almeno*** *una radice nel campo complesso.*

Anche se l'enunciato è semplice, la prima dimostrazione, che risale al 1799 ad opera di Gauss, è una dimostrazione di *esistenza*, il che significa che è garantita l'esistenza di una radice, ma non si dice come fare per determinarla. Poiché il teorema di Ruffini, nota una radice, ci permette di scomporre il polinomio di grado *n* nel prodotto di un polinomio di primo grado per uno di grado $n-1$, riapplicando il teorema fondamentale a quest'ultimo polinomio di grado $n-1$, e ripetendo il procedimento, arriveremo alla fine a scomporre il polinomio iniziale come prodotto di *n* fattori di primo grado, eventualmente a coefficienti complessi.

Abbiamo così una seconda forma del teorema fondamentale:

Ogni equazione polinomiale di grado n, a coefficienti complessi o reali, ha ***esattamente*** *n radici, eventualmente ripetute, nel campo complesso.*

In formula:

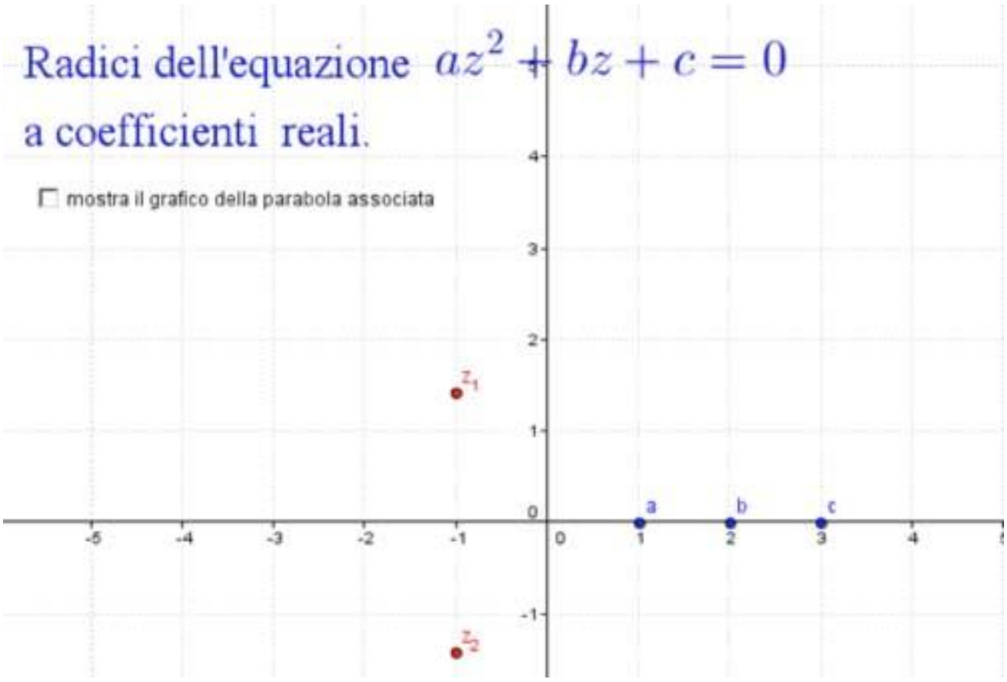
$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots\ldots+a_n=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdot\ldots\ldots(z-\alpha_n).$$

Come esempi, si consiglia di proporre alla classe equazioni quali $x^4 - 1 = 0$, oppure $x^6 - 64 = 0$, che sono facilmente risolubili se si fattorizzano i polinomi associati.

Dopo i lavori di Gauss, rimaneva tuttavia aperta la questione se fosse possibile risolvere *per radicali* le equazioni algebriche di grado superiore al quarto. La risposta venne data da Paolo Ruffini (1765-1822) e Niels H. Abel (1802-1829) in uno dei più celebri teoremi della matematica (detto di Ruffini-Abel):

non si può fornire, in generale, una formula risolutiva per radicali delle equazioni algebriche di grado $n > 4$.

Ciò non vuol dire, naturalmente, che non si possano calcolare le soluzioni di equazioni di grado superiore al quarto, ma non c'è un metodo risolutivo generale. In casi particolari sarà possibile trovare metodi risolutivi “semplici” (per esempio, nel caso di cui si è detto sopra: $x^6 - 64 = 0$), ma in generale non si riuscirà a trovare un'espressione algebrica delle soluzioni; per calcolare valori approssimati delle eventuali soluzioni reali si dovranno usare metodi numerici (in genere metodi iterativi). Si può illustrare la situazione con l’applet che permette di calcolare e visualizzare le soluzioni di un’equazione di quinto grado a coefficienti reali:



Scarica il file *geogebra*

Al variare dei coefficienti, che cosa possiamo osservare?

Indicazioni metodologiche

Si propone di iniziare l'argomento con un quadro storico sull'origine dei complessi, anche per far percepire che la matematica è una disciplina che si sviluppa nel tempo.

Non si insisterà su espressioni complicate. Quando si introducono le varie operazioni, è bene considerare sempre i casi che si presentano quando un termine di un'operazione è reale, oppure è un numero immaginario. La rappresentazione geometrica sul piano di Argand-Gauss permette di visualizzare i numeri complessi in modo chiaro e convincente. Si raccomanda l'uso di un software di geometria dinamica, come le applet usate nell'attività. Interpretare l'addizione come somma di vettori del piano non dovrebbe porre troppe difficoltà. La rappresentazione della moltiplicazione come roto-omotetia è sicuramente più complessa, ma permette poi di capire facilmente le radici di un numero complesso.

È sicuramente interessante per gli studenti ricollegarsi allo studio delle equazioni di secondo grado.

Varie attività proposte, pur non presentando particolari difficoltà tecniche, richiedono tempi adeguati per essere assimilate dagli studenti. Il docente sceglierà quali parti proporre a tutta la classe e quali invece assegnare solo agli studenti più preparati e motivati.

Pensiamo sia utile per tutta la classe esporre, in modo informale, il teorema fondamentale dell'algebra, e discuterne le conseguenze relative alla fattorizzazione dei polinomi.

Spunti per approfondire

Spunti per approfondimenti disciplinari

Approfondimento 1

Radici di un numero complesso

Applicando la formula di De Moivre, si prova che, per ogni numero complesso non nullo z e per ogni numero naturale n, esistono n radici n-esime di z, ovvero esistono n numeri complessi w tali che $w^n = z$.

Si consideri l'applet che permette di esplorare le radici di un complesso.

Scarica il file geogebra

Partiamo da un caso semplice: se z è un numero reale, ad esempio $z = 8$, e vogliamo determinare una sua radice terza w, questa starà sulla circonferenza di raggio 2 (ovviamente $2 = \sqrt[3]{8}$). Visualizzando le potenze di w, si osserva che naturalmente $w^3 = 8$.

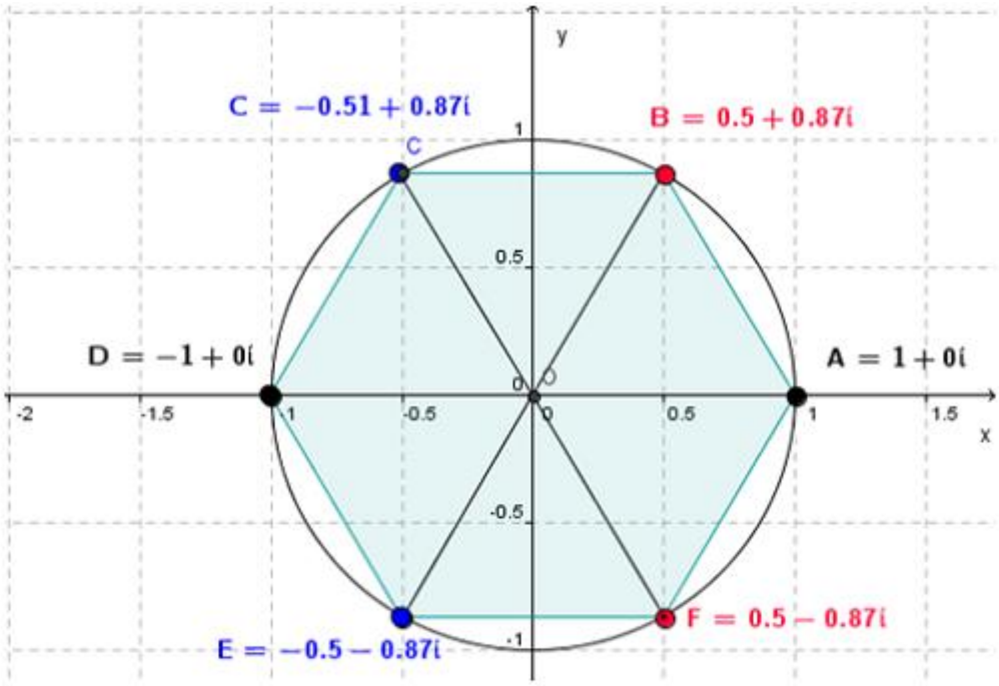
Si cominci ora a spostare w lungo la circonferenza: percorrendo un giro completo, quante volte w^3 coincide con 8?

Quali valori assume w in questi casi?

Se $z = 1$, come si dispongono le 3 radici di z?

Si provi poi a variare n, ossia ad esplorare il caso delle radici quadrate, quarte, quinte, eccetera. Che cosa si osserva?

Se $z = 1$, come si dispongono le n radici di z?



Si provi infine a spostare *z* nel piano: si verifica ancora la stessa situazione?

Se la classe è particolarmente interessata e se lo si ritiene utile, si può concludere dicendo che le *radici n-esime* di *z* sono date dalla formula seguente:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]_{k=0,1,\dots,n-1}$$

Se rappresentiamo tali radici nel piano complesso, come già notato, si ottengono i vertici di un poligono regolare di *n* lati inscritto in una circonferenza con centro nell'origine degli assi *O* e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Ogni *numero complesso* diverso da zero *ammette n radici n-esime distinte.*

Nel caso particolare in cui *z* = 1, si ottengono le radici *n*-esime dell'unità. Per esempio le radici seste dell'unità sono rappresentate nei vertici dell'esagono regolare nella figura seguente.

Approfondimento 2

Numeri complessi come operatori sul piano

In un *piano complesso* sono fissati:

1) un punto ***origine*** O, che è il punto di applicazione di tutti i vettori;

2) un vettore non nullo $\overrightarrow{OU}$(***vettore unitario***) dove *U* corrisponde al punto 1 = 1 + 0*i*;

3) il verso antiorario inteso come *verso positivo delle rotazioni* attorno al punto O (origine).

Se si moltiplica un qualunque vettore $\overrightarrow{OA}$per un numero reale non negativo *ρ* e si ruota il vettore $\overrightarrow{OP}$ottenuto attorno all'origine O di un angolo orientato *θ* (misurato in radianti), si ottiene il vettore $\overrightarrow{OB}$.

Possiamo, quindi, identificare un numero complesso di modulo *ρ* e argomento *θ* con l'operatore, che ad ogni vettore del piano $\overrightarrow{OA}$associa il vettore $\overrightarrow{OB}$.Un numero complesso z è così un operatore nel piano complesso che ad ogni vettore $\overrightarrow{OA}$fa corrispondere un vettore $\overrightarrow{OB}$.

Si ha $z : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$; $z : \overrightarrow{OA} \to \overrightarrow{OB}$, dove $\overrightarrow{OB} = z \cdot \overrightarrow{OA}$.

Un numero complesso si può quindi vedere come una ***coppia***:

- il primo elemento è un numero reale non negativo ρ che indica la "dilatazione" (o "contrazione") del modulo del vettore a cui è applicato *z*;

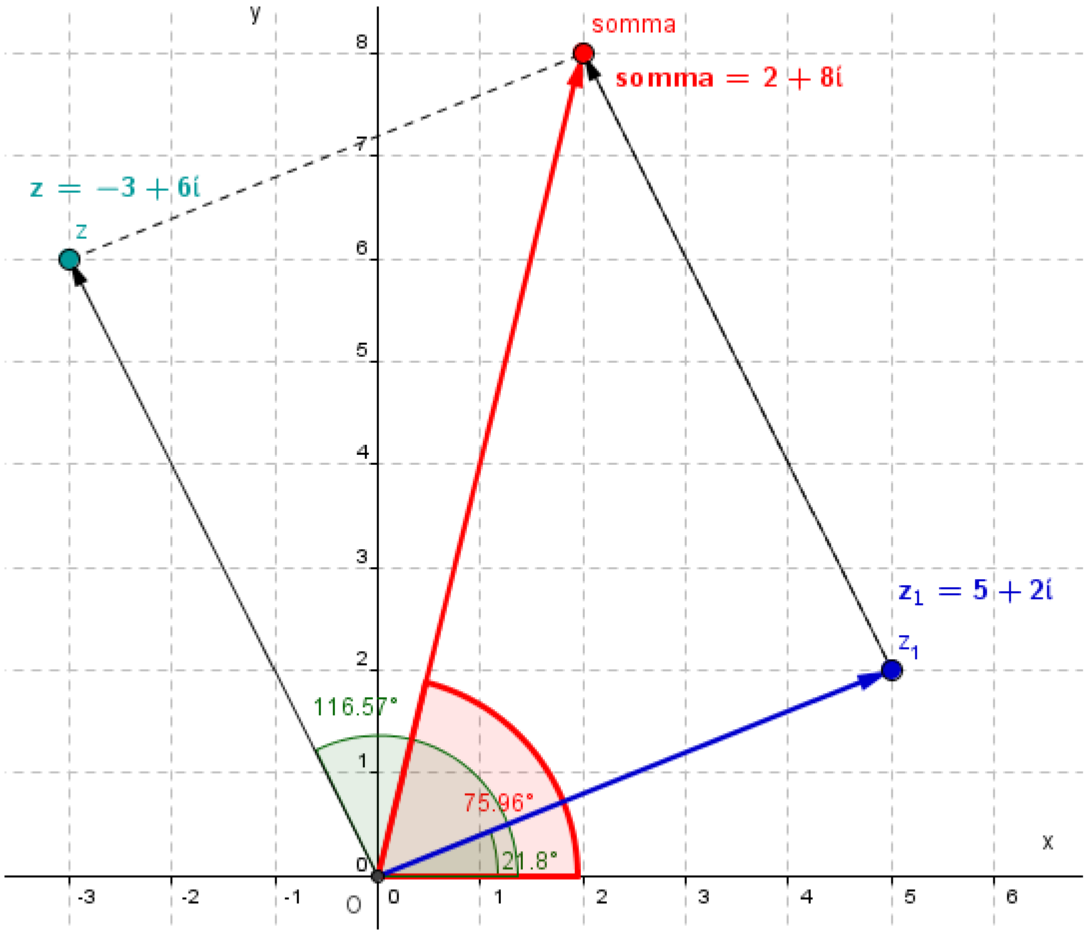
- il secondo è un numero reale *θ* che indica l'angolo della rotazione che il vettore iniziale deve effettuare attorno all'origine degli assi.

Questa definizione identifica una ***roto-omotetia***, ovvero con la composizione dell'***omotetia*** di rapporto *ρ* e centro *O* (origine degli assi) con una ***rotazione*** attorno all'origine ed è nella sostanza equivalente alla definizione trigonometrica di un numero complesso.

In coerenza con quanto detto in precedenza, due numeri complessi sono uguali se hanno moduli uguali e argomenti che differiscono per un multiplo intero di 2π.

Operazioni con i numeri complessi

L'***addizione*** di due numeri complessi coincide con la "***regola del parallelogramma***" per determinare la somma di due vettori.



Fissato un numero complesso $z_0 = a + ib$, allora la somma di z_0 con un numero complesso $z = x + iy$ equivale a traslare il punto $P(x, y)$ di un vettore di componenti (a, b). Sinteticamente possiamo dire che la trasformazione $T : z \rightarrow z + z_0$ è una traslazione del piano.

Il ***prodotto*** si ottiene con la regola vista in precedenza. Se un numero complesso *u* ha modulo 1 (cioè se $|u| = 1$), allora è rappresentato da un *vettore unitario* applicato all'origine degli assi. In questo caso il numero complesso in forma goniometrica si riduce a $u = \cos\theta + i \sin\theta$.

Il prodotto di un generico numero complesso z per u determina pertanto una rotazione di angolo θ di centro l'origine *O*.
Quindi la trasformazione $R : z \rightarrow z \cdot u$ è una rotazione del piano di centro *O*, se u ha modulo 1.
Il prodotto di un generico numero complesso *z* per un numero reale positivo *ρ* determina un'omotetia di centro l'origine *O* e di rapporto *ρ*. Quindi la trasformazione $H : z \rightarrow \rho \cdot z$ è un'omotetia del piano di centro *O*.
Il prodotto di un generico numero complesso *z* per *u* determina pertanto una rotazione di angolo *θ* di centro l'origine *O*. Quindi la trasformazione.

Esercizio

Rappresenta il vettore $z = 1+2i$, nel piano di *Argand-Gauss*	
• Quanto vale ***r***?	
• Quanto vale ***ρ***?	
Rappresenta i due vettori $z_1 = 1-2i$ e $z_2 = 1+2i$ nel piano di *Argand-Gauss*	
• Calcola la somma dei due vettori	
• Calcola il prodotto tra i due vettori	
• Calcola la differenzatra i due vettori	
Rappresenta un *vettore*a piacere nel piano di *Argand-Gauss*	
• Quanto vale ***r***?	
• Quanto vale ***ρ?***	
Rappresenta due *vettori* nel piano di *Argand-Gauss*	
• Calcola la somma dei due vettori	
• Calcola il prodotto tra i due vettori	

• Calcola la differenza tra i due vettori	

In questa rappresentazione è particolarmente interessante il ruolo dell'unità immaginaria *i*, che può essere interpretata come la ***rotazione in senso antiorario di un angolo retto attorno all'origine***.

Questa interpretazione dei numeri complessi stabilisce un legame molto interessante tra numeri complessi e trasformazioni geometriche del piano, ed ha molte applicazioni in fisica, in particolare in elettrotecnica nell'analisi dei circuiti elettrici in corrente alternata.

Trasformazione del piano	***Numero complesso che definisce la trasformazione***	**Applicazione di Cin C**
Traslazione	$z_0 = a + ib$	$T : z \longrightarrow z + z_0$
Rotazione di centro O	$u = \cos\theta + i \sin\theta$	$R : z \longrightarrow z \cdot u$
Simmetria centrale rispetto a O	$z_0 = -1$	$S : z \to -z$
Rotazione di 90° di centro O con verso antiorario	$z_0 = i$	$S : z \to iz$
Omotetia di centro O	$\rho \in R^0+$	$H : z \longrightarrow \rho \cdot z$
Roto-omotetia di centro O	$z_1 = \rho 1(\cos \theta 1 + i \sin \theta 1)$	$\Omega : z \longrightarrow z_1 \cdot z$
Simmetria assiale di asse x		$S : z \to \bar{z}$

Si noti che, mentre l'addizione ha una perfetta analogia con la somma di vettori (applicati in *O*), la moltiplicazione non possiede analogie con il prodotto scalare o il prodotto vettoriale. La moltiplicazione di numeri complessi è un'operazione che restituisce un numero complesso; è quindi un'operazione *interna* in quanto produce un elemento che è un numero complesso. Nell'insieme dei vettori è invece definito il prodotto scalare, che non è un'operazione interna: il prodotto di due vettori è uno scalare e non un vettore. Nell'insieme dei vettori dello spazio tridimensionale è anche definito il prodotto vettoriale di due vettori, che è un vettore dello stesso spazio, e quindi il prodotto vettoriale è un'operazione interna, ma il risultato (vettore prodotto) non appartiene mai al piano individuato dai due vettori di partenza.

Approfondimento 3

Le radici di un'equazione di secondo grado nel piano complesso

Il software *GeoGebra* mette a disposizione la funzione predefinita RadiciComplesse(<Polinomio>) che restituisce numeri complessi sul piano. <Polinomio> è un polinomio di grado qualsiasi a coefficienti reali nelle variabili *x* oppure *z*.

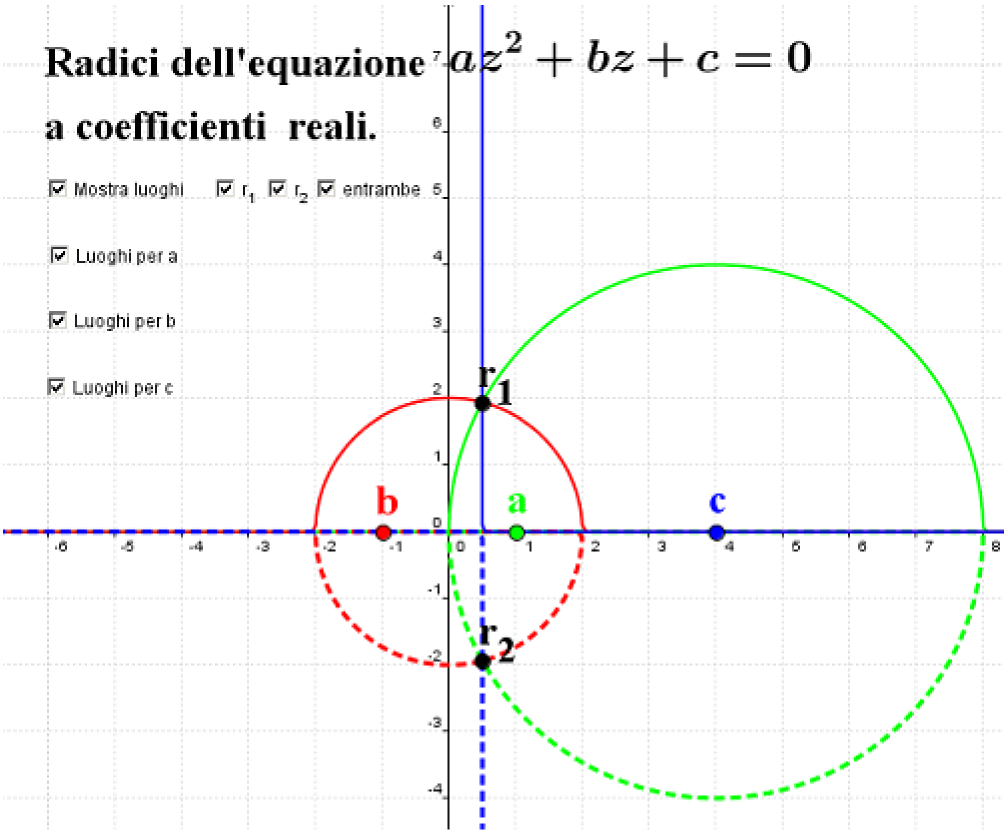
Per introdurre coefficienti reali sul piano cartesiano di GeoGebra, possiamo usare, in alternativa agli *Slider*, punti vincolati sull'asse reale (ascisse) e estrarne la prima coordinata.

Introduciamo i punti $a = 1 + 0i$ (numero complesso corrispondente al punto $a = (1, 0)$), $b = (-1, 0)$, $c = (4, 0)$. Naturalmente le coordinate dei punti e i corrispondenti numeri complessi cambieranno quando si agirà su di loro.

Il polinomio di secondo grado, di cui visualizzeremo e studieremo le due radici, avrà la forma: $f(z) = az^2+bz+c$.

Le due radici r_1 e r_2, zeri del polinomio, sono definite dall'istruzione RadiciComplesse(f).

Mantenendo fissi due coefficienti e variando il terzo, le radici tracciano i luoghi mostrati nella figura seguente:



L'opzione Mostra luoghi, che compare accanto, servirà per separare gli oggetti sui quali si svolgono le riflessioni proposte.

Se il controllo *Mostra luoghi* è disattivato si vedono i coefficienti e le due radici. Si osservi che le due radici sono associate alle formule

$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ed $r_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Si noti anche che le radici, rappresentate da punti del piano, hanno come ordinata la loro parte immaginaria. Quando le due radici sono reali, $\Delta \geq 0$, la parte immaginaria è nulla e quindi i due punti stanno sull'asse delle ascisse. Tenendo fissi i due coefficienti a = 1, c = 4, proviamo a spostare il punto corrispondente al coefficiente (reale) b. Le due radici si muovono in modo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse producendo un curioso effetto di collisione. Possiamo porci alcune domande alle quali non è difficile rispondere:

- Perché le radici sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse?

Simmetriche rispetto all'asse delle ascisse significa che sono numeri complessi coniugati, come è ovvio per la formula risolutiva.

- Tenuti fissi *a* e *c*, per quali valori di *b* le due radici collidono?

La *collisione* si ha quando le due radici sono uguali e ciò succede quando $\Delta = 0$ e quindi per $b^2 = 4\,ac$, cioè per $b = \pm 2\sqrt{a\,c}$, e quindi per due valori opposti di *b*.

È anche evidente che se *a* e *c* sono opposti non c'è collisione: che cosa succede in questo caso?

Per vedere come si muovono le due radici al variare di *b*, ne mostriamo il luogo attivando il controllo *Mostra Luoghi* e, successivamente, *Luoghi per b*. Si *vede* che le due radici tracciano, insieme, l'asse reale e una circonferenza centrata nell'origine.

Per dimostrarlo riprendiamo la formula che esprime le radici dell'equazione quadratica:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Consideriamo il caso di *a* e *c* positivi. Se $\Delta \geq 0$, e quindi *b* è esterno all'intervallo]-$2\sqrt{a\,c}, 2\sqrt{a\,c}$[, le due radici sono reali e quindi stanno sull'asse delle ascisse. D'altra parte, quando $b = \pm 2\sqrt{a\,c}$ le due radici coincidono e il loro valore è $r_{1,2} = \frac{-b}{2a} = \frac{\mp 2\sqrt{a\,c}}{2a} = \mp\sqrt{\frac{c}{a}}$ (entrambe positive o negative).

Dato che $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$, se indichiamo con *R* ed *R*' i due punti di collisione, le due radici si corrispondono nella "inversione della retta" rispetto al segmento *RR*', cioè nella trasformazione che associa al punto di ascissa *x*0 dell'asse *x* il punto di ascissa *c*/(*ax*0) sempre sull'asse *x* (il prodotto delle radici è il quadrato del *raggio* dell'intervallo). Le radici quindi coprono l'intero asse delle ascisse e se una è all'interno dell'intervallo, l'altra sta all'esterno.

Se invece $\Delta < 0$, con *b* quindi all'interno dell'intervallo]- $2\sqrt{a\,c}, 2\sqrt{a\,c}$[, allora le due radici hanno la stessa parte reale (che indichiamo con *x*) e parte immaginaria (*y*) opposta.

L'equazione del luogo delle radici è: $\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} \\ y = \frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \end{cases}$ con *b* parametro.

Ricaviamo il parametro *b* dalla prima equazione e poi sostituiamolo nella seconda:

Elevando a quadrato i due membri della seconda equazione, con qualche passaggio si ottiene l'equazione cercata del luogo che risulta, come ci si aspetta, la circonferenza centrata nell'origine di raggio

$b = 2\,ax$; $y = \frac{\pm\sqrt{4\,ac-4\,a^2\,x^2}}{2\,a} = \frac{\pm\sqrt{ac-a^2\,x^2}}{a}$

$\sqrt{\frac{c}{a}}$.

$$a^2y^2 = a\,c - a^2x^2 \quad \rightarrow \quad a^2x^2 + a^2y^2 = a\,c \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$$

Analoghe considerazioni permettono di verificare che, lasciando fissi i coefficienti *a* e *b*, il luogo delle due radici è dato dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = \frac{-b}{2a}$.

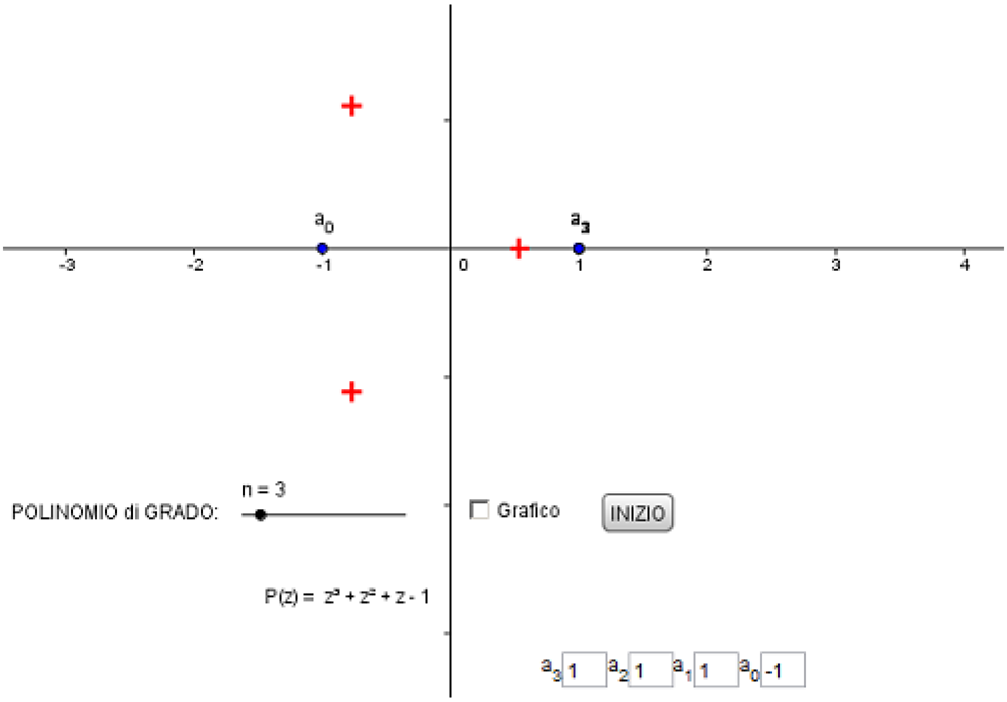
Quando invece si fissano *b* e *c* e si fa variare *a*, il luogo delle radici è, oltre al solito asse delle ascisse, la circonferenza passante per l'origine e con centro nel punto $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$. La sua equazione è quindi $x^2 + y^2 + \frac{2c}{b}x = 0$.

Possiamo infine notare che le due circonferenze e la retta sono legate tra loro: la retta passa per l'intersezione delle due circonferenze, ne è quindi l'*asse radicale*. Per verificarlo si calcola la differenza tra le equazioni delle due circonferenza.

Approfondimento 4

Le radici di una equazione polinomiale di grado superiore al secondo nel piano complesso

Ilfile GeoGebra polinomio aiuterà a svolgere qualche esplorazione sulle radici (reali o complesse) di un polinomio di grado superiore al secondo.



Scarica il file geogebra

La figura mostra il polinomio P(z) = $z^3 + z^2 + z - 1$ e le sue tre radici (in rosso) nel piano complesso.

Si possono modificare i coefficienti sia spostando i punti corrispondenti (a_0, a_1, a_2, …) sull'asse reale, sia intervenendo nelle corrispondenti caselle dell'ultima riga.

Ad esempio, si porti il punto a_0 nell'origine: come coefficiente del polinomio il suo valore è 0. Il polinomio diventa: $P(z) = z^3 + z^2 + z$ e quindi le sue radici sono:

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Portiamo ora a_0 in 1. Il polinomio è $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ con le radici $z_0 = -1$, $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Infatti $(z3 + z2 + z + 1)(z - 1) = z^4 - 1$ che si scompone in $(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)$.

Possiamo intervenire ora sui coefficienti modificandone il valore nelle rispettive caselle.
Ad esempio, portiamo a 0 i coefficienti a_1 e a_2 e poniamo $a_0 = -1$. Il polinomio diventa $z^3 - 1$: le radici hanno modulo uguale a 1 e argomenti che dividono l'angolo giro in tre parti (vedi *Attività* 3/*Fase* 3).

Spostando a_0 sull'asse reale, si osserva che le tre radici si muovono secondo un'omotetia centrata nell'origine e di rapporto: si tratta, infatti, delle radici di $z^3 - a_0$.
Se mostriamo il grafico del polinomio attivando il controllo *Grafico*, si nota che la radice reale corrisponde all'intersezione del polinomio con l'asse delle ascisse.

Queste stesse considerazioni si possono ripetere con i polinomi di grado superiore. Il grado del polinomio in esame è determinato dal cursore n che (nella figura) può variare da 2 a 11. Il pulsante *INIZIO* porta tutti i coefficienti a 1, eccetto $a_0 = -1$.

Suggeriamo un'altra esplorazione: impostiamo i coefficienti secondo $(z + 1)^n$.

Ad esempio possiamo scrivere il polinomio $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$. Evidentemente le tre radici sono coincidenti e uguali a $z = -1$.

Se poniamo $a_0 = 0$, e poi muoviamo a_0 sull'asse reale, le radici risultano le immagini nella traslazione di quanto osservato nel caso del polinomio $z^3 - a_0$.

Un'ulteriore esplorazione: dato il polinomio $z^n - a_0$, con n pari, come cambia la distribuzione delle radici in base al segno di a_0?

Spunti per altre attività con gli studenti

Risoluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo nel campo complesso.

Risolvere le equazioni seguenti

$x^3 - \sqrt{}^2\, x2 + x - \sqrt{2} = 0$ (si riesce a risolverla semplicemente raccogliendo)

$x^3 - 6x^2 + 12x - 11 = 0$ (si può riscrivere nella forma $(x - 2)^3 = 3$)

Elementi per prove di verifica

Verifica delle proprietà dei numeri complessi usando ***anche*** un software di geometria dinamica, come ***GeoGebra.***

Scheda di lavoro 1 (***il piano di Argand-Gauss***)

Rappresenta i punti citati nel piano di *Argand-Gauss* e rispondi alle domande	
• Indica la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di $z = 1 - 3i$	
• Indica la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di $z = -i$ e di $z = 1/2$	
• Determina il complesso coniugato di $z = -4 + i$ e di $z = 4/3 - i$	
• Trova un numero z tale che l'opposto di z coincida con il complesso coniugato di z	
• Calcola il reciproco di $z = 1 - 3i$	

Scheda di lavoro 2 (***approfondimento e verifica sul piano di Argand-Gauss***)

Considera un punto *z* nel piano di *Argand-Gauss*	
• Dove si trova z se la sua parte immaginaria è uguale a zero?	
• Dove si trova z se la sua parte reale è uguale a zero?	
• Dove si trova z se la sua parte reale è uguale al coefficiente della parte immaginaria?	
• Indica un numero z tale che il suo modulo	

sia uguale alla parte reale	
• Indica un numero *z* tale che il suo modulo sia uguale al coefficiente della parte immaginaria	
• Calcola il reciproco di $z = i$ e di $z = -i$	

Scheda di lavoro 3 (***le operazioni con i numeri complessi***)

Considera due punti z_1 e z_2 nel piano di *Argand-Gauss*	
• Se $z_1 = 2 -$ e $z_2 = 3 - i$, calcola $\lvert z_1 - z_2 \rvert$	
• Quando la somma di z_1 e z_2 è uguale a zero?	
• Quando la differenza di z_1 e z_2 è uguale a zero?	
• Quando il prodotto di z_1 e z_2 è uguale a zero?	
• Quando il quoziente di z_1 e z_2 è uguale a zero?	
• Se i due numeri complessi sono sull'asse delle *x*, la somma si trova sull'asse delle *x*?	
• Se i due numeri complessi sono sull'asse delle *y*, la somma si trova sull'asse delle *y*?	
• Se i due numeri complessi sono sull'asse delle *x*, il prodotto è sull'asse delle *x*?	
• Se i due numeri complessi sono sull'asse delle *y*, il prodotto è sull'asse delle *y*? Sull'asse delle *x*?	
• Se i due numeri complessi sono uno su l'asse *x* e uno sull'asse *y*, dove si trova il prodotto?	
• Se i due numeri complessi sono simmetrici	

rispetto all'asse *x*, dove si trova la somma?	
• Se i due numeri complessi sono simmetrici rispetto all'asse *x*, dove si trova il prodotto?	

Attività di verifica

1. I vertici *A*, *B* e *C* di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$ e $z_3 = 3$. Dimostrare che il triangolo *ABC* è rettangolo isoscele e determinare il perimetro e l'area.
2. I vertici *A*, *B* e *C* di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = 4 - i$, $z_2 = 8 - i$ e $z_3 = 6 + 3i$. Dimostrare che il triangolo *ABC* è isoscele e determinare il perimetro e l'area.
3. Descrivere e rappresentare i luoghi geometrici dei punti del piano rappresentati dalle seguenti equazioni:

   $a)\ |z| = 1,\quad b)\ |z - i| = 1.$

4. Descrivere e rappresentare i luoghi geometrici dei punti del piano rappresentati dalle seguenti disequazioni:

   $a)\ |z| \leq 1,\quad b)\ |z| \geq 2$

5. Disegnare le figure del piano rappresentate dalle seguenti equazioni:

   a) $z \cdot \bar{z} = 4$ b) $z + \bar{z} = 8$

Scheda di lavoro 4 (***Rappresentazione in forma trigonometrica dei numeri complessi***)

Scrivi in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi e rappresentalinel piano di *Gauss*	
$z = 1$	
$z = -1$	
$z = i$	
$z = i$	
$z = 2i$	
$z = 1 - 2i$	
$z = 1 + 2i$	
$z = -1 - 2i$	
$z = -1 + 2i$	

Dopo aver scritto in forma trigonometrica i due numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = 1 + 2i$, rappresentalinel piano di *Argand-Gauss*; quindi calcola:	
la somma dei due numeri	
il prodotto tra i due numeri	
la differenza tra i due numeri	
il quoziente tra i due numeri	

Esercizi

1. Calcola le radici terze dell'unità e rappresentale nel piano di Argand-Gauss.
2. Risolvi l'equazione $z^3 + 8 = 0$ e rappresenta le soluzioni nel piano complesso.
3. Determina le potenze ad esponente intero di ***i*** e rappresentale nel piano di Argand-Gauss.

i^2	$= -1$
i^3	$= i \cdot i^2 = -1 \cdot i = -i$
i^4	=
i^5	=
i^6	=
i^7	=
i^8	=

Scheda di lavoro 5 ***sui vettori***

Rappresenta un ***vettore*** a piacere nel piano di ***Argand-Gauss***	
• Quanto vale il modulo ρ?	
• Quanto vale l'argomento θ?	
Rappresenta due *vettori* nel piano di *Argand-Gauss* e scrivili in forma trigonometrica. **Quindi calcola**	
• la somma dei due vettori	
• il prodotto tra i due vettori	

Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

MIUR

Scheda di lavoro 6 ***(Risoluzione di equazioni algebriche di secondo grado nel campo complesso).***

Risolvi le seguenti equazioni anche usando GeoGebra	**Soluzioni**
$z^2 + 2z + 5 = 0$	
$z^2 + 2z = 0$	
$z^2 + 4 = 0$	
$z^2 - 4 = 0$	
$z^2 + 2iz = 0$	
$z^2 + 4i = 0$	
$z^2 - 2iz = 0$	
$z^2 - 4i = 0$	
$z^2 - (2 - i)z - 1 - 2i = 0$	

Risorse

Documentazione e materiali

Numeri complessi prodotto

Numeri complessi somma

Omotetia prodotto

Potenze ennesime complesso

Polinomio

Radici dell'equazione con numeri complessi

Radici dell'equazione a coefficienti reali

Radici ennesime di un complesso

Radici quadrate di un numero complesso

Bibliografia

Numeri complessi, vettori e trasformazioni geometriche del piano, in *Matematica* 2004, UMI, 2004.

Ciarrapico, L. *Numeri complessi e quaternioni*. Cultura e Scuola, n. 99 (luglio-settembre 1986), pag. 221-237.

Machì, A. *Risolta un'equazione, in che senso ne conosciamo le radici*?, Archimede, LVII (2005), LVII (2005), pag. 70-75.

Sitografia

AAVV. La matematica per le altre discipline
(Visitato nel maggio 2013)