Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
MIUR

Il dolce al cioccolato

(adattamento da "Matematica 2001")

di Ardizzone M.R., Cotoneschi S., Punzo C.

Area tematica

Numeri

Autori

Maria Rosa Ardizzone, Stefania Cotoneschi, Colomba Punzo

Ordine di scuola

Scuola primaria – Classe V

Tempo medio per svolgere il percorso

10-12 ore

Sommario

Scheda generale

Informazioni

Nucleo a cui si riferisce il percorso

Numeri

Autori

Maria Rosa Ardizzone, Stefania Cotoneschi, Colomba Punzo

Ordine di scuola

Scuola primaria - Classe V

Tempo medio per svolgere l'attività in classe

10-12 ore

Nodi concettuali

- Divisione con resto fra numeri naturali.
- Scelta consapevole della strategia di calcolo più adeguata (calcolo mentale esatto o approssimato).
- Stima del risultato di una operazione.
- Frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi *obiettivi di apprendimento* che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

L'alunno:

- Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo sia sui risultati.
- Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Numeri

- Conoscere la divisione con resto fra numeri naturali; individuare multipli e divisori di un numero.
- Stimare il risultato di una operazione.

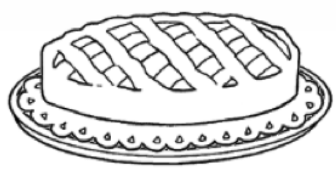
Relazioni, dati e previsioni

- Rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimano la struttura.

Prove INVALSI

a.s. 2008/2009 – Domanda D15
Scuola primaria – Classe V

15. Per fare una crostata per 8 persone utilizzo, tra gli altri ingredienti, 240 grammi di farina e 160 grammi di burro. Se impasto 360 grammi di farina e 240 grammi di burro, per quante persone sarà la crostata?



- ☐ A. 16 persone.
- ☐ B. 12 persone.
- ☐ C. 10 persone.
- ☐ D. Non si può dire.

Soluzione INVALSI: B. 12

Commento

L'allievo può utilizzare varie strategie per rispondere alla domanda. Sia che risalga alle quantità di farina e di burro necessarie per una persona sia che lavori sui divisori e multipli utilizzerà un ragionamento che costituisce un primo approccio al concetto di proporzionalità.

a.s. 2009/2010 – Domanda D16*Scuola primaria – Classe V*

D16. Paolo versa 4 cucchiaini di zucchero in un bicchiere che contiene 200 ml di acqua. Assaggia e dice: "Così mi piace!".
Ha a disposizione un barattolo di zucchero e una brocca che contiene 1000 ml di acqua. Come può fare per rendere l'acqua della brocca dolce come quella del bicchiere?

- ☐ A. Deve mettere nella brocca 20 cucchiaini di zucchero
- ☐ B. Deve mettere nella brocca 12 cucchiaini di zucchero
- ☐ C. Deve mettere nella brocca 8 cucchiaini di zucchero
- ☐ D. Deve mettere nella brocca 4 cucchiaini di zucchero

Soluzione INVALSI: A. Deve mettere nella brocca 20 cucchiaini di zucchero

Commento

Anche in questo caso si richiede un ragionamento di tipo proporzionale seppure non esplicito. Può essere svolto utilizzando le operazioni di divisione e moltiplicazione, ma anche tenendo conto che 200 ml di acqua è un quinto di 1000 ml e considerando quindi che si deve moltiplicare per 5 lo zucchero versato nell'acqua.

Introduzione all'attività

Il contesto di lavoro è rappresentato dalla produzione in classe di un dolce al cioccolato partendo da una ricetta base per 5 persone. Il primo problema che si presenta è quello di adattare la ricetta con le dosi adeguate. In questa fase di lavoro si vogliono avvicinare gli allievi al concetto di proporzionalità, anche se in modo informale, mettendo in evidenza le diverse strategie di soluzione che possono emergere.

Successivamente l'esperienza può essere utilizzata per avvicinarsi alla divisione con divisore a due cifre, partendo da un contesto reale: calcolare quanti dolci sono necessari per la festa di fine anno alla quale parteciperanno tutti i bambini della scuola.

Nell'ultima fase si tratta di scegliere la ricetta che 'conviene' di più in base alla quantità di cioccolato contenuta; non sarà difficile motivare questa attività considerato il fatto che nelle classi sono molto diffuse attività di educazione alimentare. In questa fase il confronto tra le due ricette farà emergere la necessità di confrontare le frazioni, e in seconda battuta di esprimere questo confronto servendosi della percentuale.

Questa attività è molto articolata e si presta bene anche ad essere sviluppata in momenti diversi a partire dalla fine della quarta classe, infatti in essa si seguono due tematiche distinte: quella della divisione con resto tra numeri interi e quella della proporzionalità.

Le attività suggerite sono finalizzate anche al raggiungimento degli obiettivi previsti dalle Indicazioni Nazionali.

Fase 1 – Torta di compleanno

Pensando all'importanza della motivazione degli alunni si può proporre, in occasione di un compleanno o di una festa, la preparazione di una torta per tutti i bambini. È bene che l'insegnante fornisca una ricetta adatta dopo aver pensato ai calcoli che ne deriveranno. Ne riportiamo una a titolo di esempio.

Dolce di Vania

Ingredienti per 5 persone

- 100 g di zucchero
- 125 g di farina
- 25 g di cacao amaro
- 100 g di cioccolato fondente
- 2 uova
- 2 cucchiai di olio di semi

Si suggerisce di proiettare o fornire fotocopia della ricetta ai bambini, in modo che siano loro stessi a porre la domanda:

Come possiamo fare per trovare le quantità 'giuste' degli ingredienti per un dolce che 'vada bene' per tutti i bambini della classe, in modo che non avanzi nulla, tenendo presente che il dosaggio della ricetta originaria è pensato per 5 bambini?

Sarà bene far riflettere i bambini sul significato delle parole "giuste" e "vada bene"; si potrà sollecitare una discussione chiedendo ad esempio: sarà sufficiente per tutti noi?

Una volta condiviso l'obiettivo (ovvero l'interpretazione di "giusto" come mantenente le proporzioni), è opportuno che la classe sia suddivisa in gruppi in modo che i bambini discutano fra loro per trovare una strategia adatta per determinare le giuste quantità degli ingredienti. Ogni gruppo registrerà la soluzione trovata e la giustificazione di tale risultato. Le soluzioni trovate saranno poi confrontate. Potranno emergere strategie diverse, ad esempio supponendo che la classe sia composta da 23 alunni, ecco alcune possibili risposte:

- la ricetta base è per 5 persone, allora raddoppio e la trovo per 10, poi raddoppio ancora e la trovo per 20, poi divido le quantità della ricetta base per 5, trovo gli ingredienti per 1 persona e li aggiungo ripetuti 3 volte.
- Troviamo prima la quantità per 1 persona, dividendo i numeri per 5, e poi moltiplichiamo per 23.

Se si scelgono le due strategie indicate potrà essere utile una rappresentazione in tabella.

Tabella per la prima strategia

Ingredienti	5 persone	10 persone	20 persone	1 persona	3 persone	20+3 = 23 persone
Zucchero	100 g					
Farina	125 g					
Cacao amaro	25 g					
Cioccolato fondente	100 g					

Tabella per la seconda strategia

Ingredienti	5 persone	1 persona	23 persone
Zucchero	100 g		
Farina	125 g		
Cacao amaro	25 g		
Cioccolato fondente	100 g		

Teniamo conto che si deve usare il numero “vero” degli alunni, ma tale numero può essere aumentato per comodità, tenendo conto di insegnanti o di altri adulti della scuola, in modo da facilitare il calcolo. In ogni modo è bene che questa eventuale strategia (del tutto accettabile) sia proposta dai bambini stessi.

Come spesso accade per i problemi “veri” sarà necessario dare spazio a considerazioni di stima e approssimazione, ad esempio dove la misura è espressa con unità non convenzionali, come i cucchiai, o nel caso delle uova che non si possono dividere.

Potrà essere utile far rilevare che le dosi delle uova e dell’olio per 20 e per 25 persone, secondo la ricetta data, sono le seguenti:

	5 persone	20 persone	25 persone
Uova	2	8	10
Olio (cucchiai)	2	8	10

I bambini arriveranno facilmente a capire che per 23 persone conviene mettere nell’impasto 9 uova e 9 cucchiai d’olio. Così come non è escluso che gli alunni propongano di preparare una torta per 25 persone “perché tanto se avanza non fa niente” ed è più facile fare i calcoli.

Tutte le considerazioni che riguardano l’economia della procedura sono assai utili ed è bene che l’insegnante le faccia emergere nella discussione di confronto.

Dopo che i diversi gruppi avranno esposto la loro strategia di soluzione, cercheremo con un lavoro collettivo di tradurre le strategie trovate con un'espressione numerica per ogni ingrediente.

Nel caso dei 23 alunni e della ricetta base utilizzata, si avrà:

- **per la prima strategia**

  ((100 x 2) x 2) + (100:5) x 3

  ((125 x 2) x 2) + (25:5) x 3

  ((25 x 2) x 2) + (25:5) x 3

- **per la seconda strategia**

  ((100 x 2) x 2) + (100:5) x 3

  ((125 x 2) x 2) + (25:5) x 3

  ((25 x 2) x 2) + (25:5) x 3

Pur non essendo necessarie tutte le parentesi, riteniamo opportuno inserirle perché sottolineano i successivi passi del ragionamento.

Sarà opportuno scrivere alla lavagna queste espressioni e invitare i bambini a osservarle: si rileva che la struttura del calcolo è la stessa per ciascuno degli ingredienti. Sarà inoltre opportuno osservare che i dosaggi trovati con le diverse strategie sono gli stessi e che la strategia più rapida è di calcolare i dosaggi per una persona e poi moltiplicarli per il numero delle persone per le quali si vuole preparare il dolce.

AVVERTENZA METODOLOGICA PER L'INSEGNANTE

È importante che l'insegnante scelga la ricetta base e le rispettive quantità degli ingredienti, in relazione al numero di alunni della classe: infatti, se il numero di persone della ricetta base non è un divisore del numero di alunni, sarà più facile che emerga la necessità di dividere le dosi in modo da ricavare la quantità per una persona o due persone, che poi viene usata per aggiungere o moltiplicare.

Fase 2 – Quanti dolci per la festa di fine anno?

In questa seconda fase vogliamo indirizzare i bambini ad affrontare una situazione problematica nella quale sia necessario fare una divisione col divisore di due cifre.

> Il dolce al cioccolato fatto dalla quinta A è venuto molto buono; così i bambini hanno deciso di prepararlo per la festa di fine anno e farlo assaggiare anche agli altri compagni della scuola.
>
> I bambini si possono quindi chiedere: se il nostro dolce va bene per 25 persone, quanti dolci dovremo fare per tutti i bambini della scuola, che sono 350?

I bambini individueranno che l'operazione da fare è la divisione e sarà il momento di imparare la procedura per arrivare al risultato.

L'operazione di divisione (come d'altra parte già l'operazione di sottrazione, con le semantiche del "togliere" e del "completare") presenta una difficoltà che non può essere evitata: essa richiama due significati importanti, uno dei quali (il "contenere") è estraneo alla semantica del "dividere" secondo il senso comune. Il contesto proposto è stato scelto appunto per evidenziare una possibile modalità per affrontare il significato di "contenenza". Tra l'altro, l'algoritmo utilizzato usualmente per il calcolo scritto della divisione fa riferimento alla semantica della "contenenza".

L'insegnante deve abituare i bambini a verbalizzare in modo preciso il ragionamento seguito, ed è opportuno che chieda loro una rappresentazione della strategia di calcolo adottata. È importante, inoltre, aver cura di osservare attentamente le strategie di calcolo che i bambini mettono in atto nella risoluzione di problemi riguardanti la divisione, senza cedere alla tentazione di avviare gli alunni precocemente alla usuale tecnica di calcolo scritto. In genere la tendenza è quella di utilizzare operativamente due strategie di ragionamento generali che sono:

- la pratica di ripartire un "mucchio" di oggetti distribuendoli equamente, attraverso la manipolazione o il ricorso al disegno[1];
- la pratica del procedere allo svuotamento del dividendo, per tentativi successivi, e quindi eseguire moltiplicazioni per accertarsi della esattezza/correttezza dei risultati via via ottenuti. Questa procedura appare dapprima nei problemi di "ripartizione" e poi si estende anche ai problemi di contenenza.

Compito dell'insegnante, attraverso momenti di confronto fra le strategie utilizzate nella classe, è far emergere la convenienza del secondo tipo di strategia.

Torniamo al problema delle torte per la festa della scuola ed ipotizziamo alcuni possibili ragionamenti degli alunni. I bambini, che non conoscono ancora la tecnica per eseguire l'algoritmo della divisione a due cifre, cercano il risultato utilizzando la divisione a una cifra per approssimazioni successive o usano la moltiplicazione di 25 tante volte fino ad arrivare a 350.

Un'esplicitazione possibile del ragionamento è la seguente:

350 sono i bambini e una torta accontenta 25 bambini: se ne facciamo 10 si accontentano 250 bambini, ma ancora non basta. Proviamo con 12, si accontentano 300 bambini, ancora non basta, ma se ne aggiungo altre 2 ci siamo: allora 10+2+2 =14.

14 torte dovrebbero andar bene.

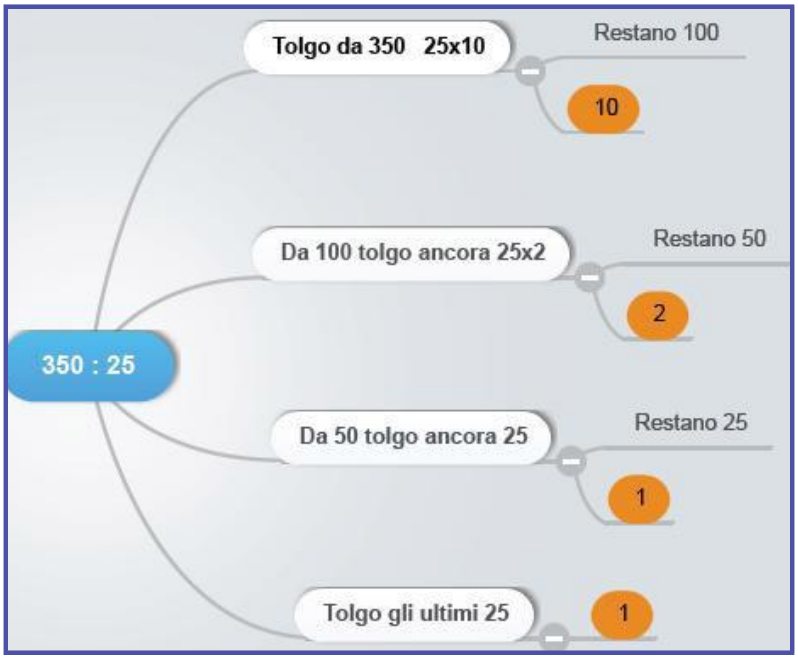
[1] Si tratta di una strategia che comporta il rischio, se essa non viene scelta dai bambini come strategia economica, bensì suggerita dall'insegnante, di essere assunta dai bambini più deboli come l'unica strategia da usare. Accade inoltre frequentemente che non appena i valori numerici rendono poco gestibile la procedura di rappresentazione, si passa all'automatismo dell'algoritmo senza legare le due fasi.

Il ragionamento mostra un avvicinamento progressivo al dividendo mediante approssimazioni successive del quoziente che, ogni volta, viene moltiplicato per il divisore in modo da orientare le approssimazioni successive (prova iniziale, eventuale ripetizione della prova con lo stesso ordine di grandezza fino al risultato migliore, poi nuove prove con ordini di grandezza minori). Stesso problema risolto in modo diverso:

Con 10 torte accontento 250 bambini. Ne restano ancora 100, allora provo con 20 torte e potrei accontentare 500 bambini, troppi! Allora torno indietro e faccio 15 torte. Per calcolare, tenendo presente 10 torte servono per 250 bambini e quindi 5 torte per 125 bambini, faccio 250+125 = 375. Sono ancora troppi, allora faccio 14 torte e provo a moltiplicare 25x14 = 350. Va bene, mi servono 14 torte!

Come si capisce nel ragionamento precedente si toglie progressivamente dal dividendo una certa quantità stabilita con calcolo mentale, si procede a capire quanto resta per continuare con nuove prove fino a che si arriva allo svuotamento completo. Se accade che provando a togliere un certo numero, ad un certo punto si supera il quoziente, allora si torna indietro e si fanno altre prove. Si procede per svuotamento del dividendo e per avvicinamento con approssimazioni successive al quoziente.

Nello schema che segue si vede la rappresentazione della procedura in un caso abbastanza semplice:



Possono emergere anche altre modalità di calcolo, in corrispondenza delle diverse strategie; in questa fase è fondamentale il ruolo dell’insegnante, che ha l'opportunità di far riflettere i bambini sul significato e sull’economicità delle strategie adottate. Ha senso indirizzare i bambini della classe verso la strategia dello svuotamento, anche se questa non sempre risulta la più naturale, passando a momenti di confronto e di discussione, dopo il lavoro individuale. Si può tranquillamente dire ai bambini che vogliamo capire bene questa strategia perché sarà di aiuto per imparare l’algoritmo della divisione col divisore di due cifre.

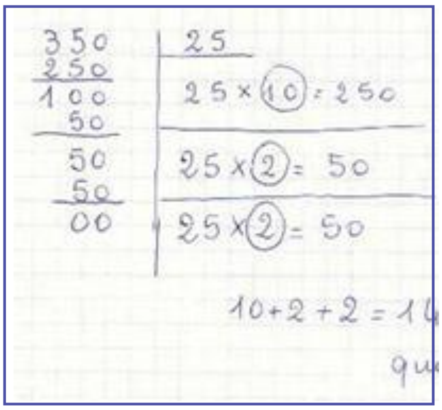
Le ragioni della scelta della strategia di svuotamento del dividendo sono sostanzialmente due:

- è l'unica strategia "universale" fra quelle prodotte spontaneamente (nel senso che è applicabile sensatamente a ogni situazione di divisione);
- è la strategia semanticamente corrispondente alla usuale tecnica di calcolo scritto (che risulta, in verità, una contrazione di questa strategia).

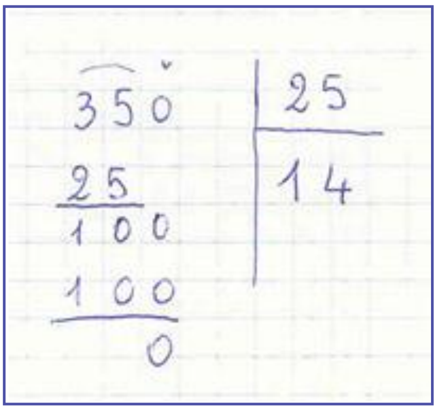
A questo riguardo segnaliamo l'articolo di Enrica Ferrero in *"L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate"* (gennaio 1990), *"Strategie di calcolo e significati della sottrazione e della divisione tra 7 e 9 anni"*.

La padronanza consapevole della tecnica di calcolo scritto della divisione è raggiungibile solo se viene curata la delicata transizione dalle strategie spontanee, le quali, per essere riconosciute dai bambini come "procedure", devono essere state oggetto di riflessione. Per consentire a tutti i bambini di comprendere l'algoritmo della divisione potrebbe essere opportuno il passaggio ad una tecnica di calcolo meno contratta di quella abitualmente insegnata. Una possibilità (che ha radici storiche antiche) è quella data dall'organizzazione dei "tentativi" che mirano a svuotare progressivamente il dividendo.

Nel semplice esempio sopra considerato, l'algoritmo di calcolo potrebbe essere rappresentato così:

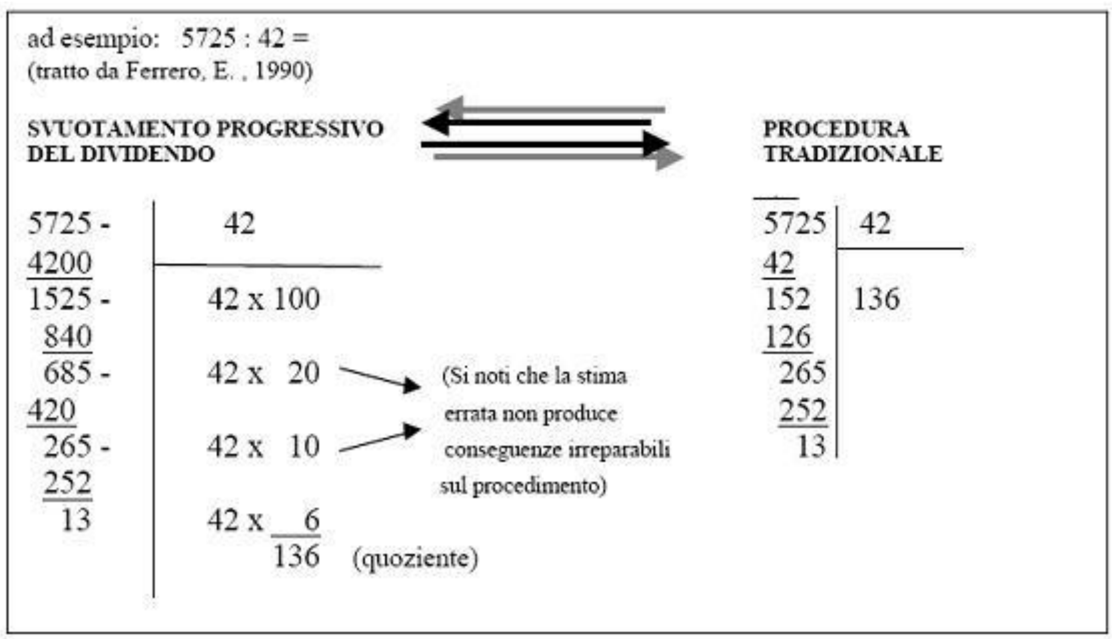


Divisione per svuotamento



Divisione tradizionale

Sarà opportuno fare anche altri esempi numerici, magari con numeri un po' più grandi e chiedere ai bambini di pensare a situazioni nelle quali quella divisione abbia un senso.



Come si può notare, la divisione così impostata permette al bambino di effettuare alcuni passaggi in modo naturale, consentendo un controllo maggiore della procedura. All'allievo dovrebbe essere chiaro che il numero 25 del primo esempio e 42 del secondo, presenti nella procedura tradizionale dell'algoritmo della divisione, indicano in maniera abbreviata 250 e 4200, e che i risultati delle sottrazioni rappresentano la parte del dividendo che è ancora da dividere, acquisendo così, agevolmente, il significato del resto. Risulta essere indifferente l'entità del divisore (se a una o più cifre).

Inoltre l'allievo ha la possibilità di effettuare tentativi infruttuosi (cioè che producono risultati eccessivi o non sufficienti) senza inficiare il procedimento: l'errore, cioè, viene recuperato all'interno della procedura. Infine, la procedura dello svuotamento progressivo del dividendo presenta diversi vantaggi rispetto al passaggio ai numeri decimali, sia perché il calcolo può essere proseguito oltre le unità, sia perché il divisore e il dividendo possono essere rappresentati anche da numeri decimali, senza cambiamenti nella procedura.

L'introduzione della tecnica di calcolo tradizionale "a freddo", cioè senza un intreccio con le strategie spontanee portatrici del senso del "dividere", risulta un fattore di difficoltà, soprattutto per gli allievi più deboli, ma in generale per tutti i bambini.

Fase 3 – Quale ricetta contiene meno cioccolato?

Dopo aver fatto attività di educazione alimentare non sarà difficile giustificare la ricerca di una ricetta per un dolce al cioccolato che contenga "meno" cioccolato.
Troviamo due ricette:

- nella prima ricetta ci sono 200 g di cioccolato e la torta cotta è di 500 g;
- nella seconda ricetta ci sono 300 g di cioccolato e la torta cotta è di 900g.

Consideriamo due fette di 100 g, una della prima torta e una della seconda: in quale fetta c'è meno cioccolato?

Come facciamo a fare questo confronto? È sufficiente dire che 300 è più di 200? Ascoltiamo come farebbero i bambini, ma teniamo presente che non sarà facile per loro rendersi conto che non è sufficiente scegliere la ricetta con la minor quantità di cioccolato, ma che bisogna anche tener conto delle due quantità contemporaneamente, con un rapporto fra grandezze.
Chiediamo ai bambini di spiegare con disegni il loro ragionamento: le rappresentazioni che loro useranno saranno un'utile modalità per tornare sul ragionamenti diversi e discutere quali siano i più efficaci.
Proporre ai ragazzi di fare rappresentazioni è cosa utile a tutti i livelli di età. Spesso aiuta a spiegare i ragionamenti seguiti e costituisce una via intermedia tra il pensare e l'argomentare.
Può accadere che qualcuno proponga di capire che parte è 200 rispetto a 500 e confrontarla con la parte rappresentata da 300 rispetto a 900. Se hanno avuto modo di vedere la scrittura di rapporti, ad esempio con punteggi in giochi o gare, potrebbero scrivere 200 su 500 da confrontare con 300 su 900; sarebbe il momento di introdurre una riflessione sulla scrittura frazionaria:

$$\frac{200}{500} \qquad \frac{300}{900}$$

Può capitare che qualcuno proponga di vedere quanta cioccolata è presente in 100 grammi di torta: questa strada porterebbe ad un'interessante apertura verso considerazioni di tipo percentuale.

Sarebbe interessante anche organizzare un ragionamento proporzionale mettendo in tabella il peso della torta e il peso del cioccolato. Noi stiamo misurando il cioccolato in rapporto alla torta e, per fare un confronto immediato, dovremmo riportare il peso torta ad una stessa quantità, in modo da far emergere la quantità di cioccolato che a quel punto può essere considerata in assoluto.

Prima torta	
Peso del cioccolato nella torta	Peso complessivo della torta in g
200	500
100	250

Seconda torta	
Peso del cioccolato nella torta	Peso complessivo della torta in g
300	900
100	300

Mettendo in relazione le due tabelle si può osservare che la stessa quantità di cioccolato (100 g) nella tabella a sinistra corrispondono a 250 g di torta e in quella destra a 300 g. Quindi la torta di sinistra è più ricca di cioccolato.

Oppure si può vedere quanto cioccolato si trova nella stessa quantità di torta delle due ricette.

Prima torta	
Peso complessivo della torta in g	Peso del cioccolato nella torta
1000	400
500	200
100	40

Seconda torta	
Peso complessivo della torta in g	Peso del cioccolato nella torta
900	300
300	100
30	10
10	3,3 circa
100	33,3 circa

Mettendo in relazione le due tabelle si può osservare che in 100 g di torta nella prima ricetta vi sono 40 g di cioccolato mentre nella seconda circa 33 grammi.

Quindi la prima torta di sinistra è più "cioccolatosa" dell'altra (ai bambini piacerà molto inventare nuovi termini per descrivere quello che hanno scoperto).

Nelle tabelle precedenti noi abbiamo scritto poche righe, quelle necessarie per arrivare al confronto richiesto. Molto probabilmente i bambini faranno altri tentativi, scrivendo un maggior numero di righe prima di giungere al risultato. La scrittura di righe superflue non costituisce un errore; anzi, l'insegnante potrà incoraggiare i bambini a prendere in considerazione altri possibili pesi (e quindi a scrivere altre righe), in modo da rafforzare attraverso esempi il concetto di proporzionalità.

Noi abbiamo messo in evidenza una possibile strada, ma se invitiamo i bambini a trovare una soluzione vedremo che le strade che troveranno saranno di più, e sarà interessante confrontarle con una discussione e magari con uno schema che rappresenti le differenti procedure. Questo faciliterà la comprensione del fatto che non è sufficiente confrontare il cioccolato in assoluto.

Suggeriamo anche di affrontare situazioni analoghe in cui i numeri sono diversi: si potranno avere così casi in cui si renda necessaria un'approssimazione dei risultati.

Inoltre si potrà aprire un'interessante discussione di come si faccia a confrontare le due frazioni:

$$\frac{200}{500} \qquad \frac{300}{900}$$

Indicazioni metodologiche

Tutta l'attività si sviluppa attorno alle strategie di soluzione di problemi trovate dagli alunni, con una forte "regia" dell'insegnante che guida, indirizza e formula domande perché gli alunni riflettano su quanto elaborato. La risoluzione del problema è possibile se il bambino riesce a dislocare temporalmente l'urgenza di giungere alla soluzione, considerando la necessità di un passaggio intermedio. Spesso il ragionamento usa elementi di proporzionalità, ricercando passo dopo passo elementi comuni nelle quantità considerate e nelle corrispondenti quantità unitarie. Questa operazione presenta difficoltà per molti alunni, ma costituisce un'importante occasione per ragionare sul rapporto fra variabili diverse.

Vogliamo aggiungere qualche altra considerazione, legata ad aspetti alimentari e a prezzi, per offrire altri spunti didattici che potranno essere utili anche in momenti diversi.

L'attività sulla torta al cioccolato può sollecitare aspetti importanti riguardanti i significati delle operazioni (ad esempio: se le dosi vengono triplicate succede che ...; se esistono confezioni da 125 g e ho bisogno di 300 g ne devo prendere …; calcolo della spesa …; se la torta costa …, quanto costa ognuna delle 24 porzioni in cui l'abbiamo divisa?; ecc.) e le loro proprietà.

Si tratta di una palestra ricca e significativa di collegamento fra variabili diverse, sia appartenenti allo stesso ambito di grandezze, come il rapporto fra grammi, ettogrammi e chili (la ricetta dice che servono 200 grammi, ma le confezioni solitamente in commercio sono da un kilo oppure da 5 etti…), sia appartenenti ad ambiti di grandezze diversi, come il rapporto fra peso (o capacità) e prezzo (125 g costano … euro; 2,5 hg costano … euro. Quale ci conviene comprare, se abbiamo bisogno di 200 g ?).

Nel corso dell'attività può emergere il problema di dover ricavare il prezzo della parte utilizzata di un determinato ingrediente.

Schematicamente, possono presentarsi tre possibilità:

- **La parte utilizzata è uguale alla parte acquistata**. Facciamo qualche considerazione che non si riferisce esattamente alla ricetta considerata all'inizio, solo per esemplificare: se in una ricetta c'è scritto 50 g di mandorle e la confezione che abbiamo comprato contiene proprio 50 g, *il prezzo della quantità <u>utilizzata corrisponde al prezzo della confezione acquistata</u>*;
- **La parte utilizzata è una frazione unitaria della parte acquistata**. Ad esempio se la ricetta dice di usare 500 g di farina e la confezione che abbiamo comprato pesava 1 kg *il prezzo della quantità <u>utilizzata è il prezzo di una parte della confezione acquistata (la metà)</u>*;
- **La parte utilizzata è una frazione non unitaria della parte acquistata**. Ad esempio abbiamo usato 150 g di farina e la confezione che abbiamo comprato pesa 1 kg; oppure ci servono 120 g di cacao, ma la confezione in vendita è da 250 g: in questi casi *per ricavare il prezzo della quantità utilizzata <u>è necessario avviare un ragionamento di proporzionalità, ricercando il costo unitario</u>*.

La prima possibilità non presenta, ovviamente, difficoltà. La seconda può essere oggetto di lavoro in classe, soprattutto quando la frazione unitaria non è immediatamente percepibile (ad esempio, quantità usata 2 hg, quantità acquistata 1 kg: la quantità usata è 1/5 di quella acquistata). È importante che l'insegnante si accerti se per tutti i bambini è chiaro che il prezzo di 5 hg è la metà del prezzo di 1 kg: il rapporto fra variabili diverse implica una difficoltà che a volte per l'adulto non è visibile.

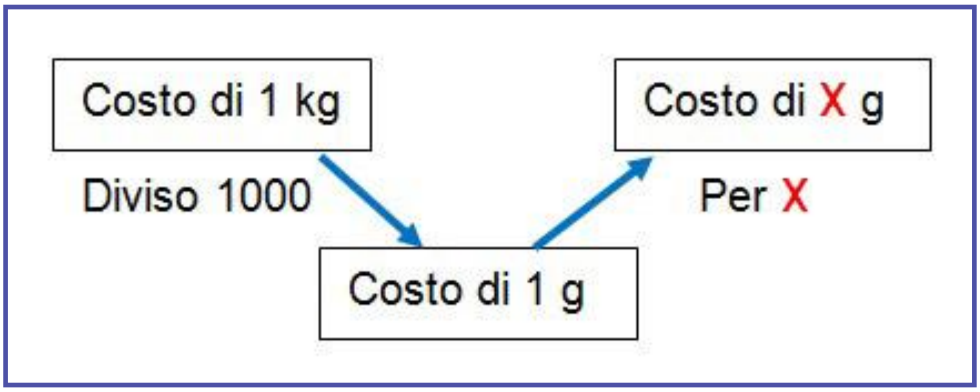
La possibilità di operare concretamente con il materiale fornisce all'insegnante delle preziose opportunità per sviluppare la comprensione del rapporto quantità/prezzo.

La terza possibilità è più complessa e richiede una trattazione più approfondita. Riprendendo un esempio proposto (150 g di farina e confezione da 1 kg), è importante che i bambini esplorino individualmente il problema di ricavare il costo di 150 g di zucchero conoscendo il costo di 1 kg.

La riflessione in classe sul costo unitario può essere condotta su due piani:

- all'interno di un problema, per ragionare sulle diverse strategie impiegate, cercando di capire cosa ottengo da ogni operazione effettuata;
- confrontando le soluzioni di più problemi per giungere ad una "regola", attraverso una discussione e riflettendo sul piano metacognitivo, il solo che permette di sviluppare la consapevolezza rispetto alle relazioni in gioco.

Un punto di arrivo soddisfacente può essere l'assunzione ragionata dello schema, dove con la lettera X si indica un numero qualsiasi di grammi.



Eventuali difficoltà e suggerimenti

Per andare incontro alle difficoltà di alcuni alunni si suggerisce di dedicare il tempo necessario alla raccolta delle rappresentazioni individuali e magari ricorrere al lavoro di gruppo. Infatti, quando si richiede di risolvere un problema da soli si può creare ansia e il bambino che ha difficoltà si può bloccare; se invece si invita a lavorare in piccoli gruppi o coppie, allora anche chi ha maggiori difficoltà può raggiungere buoni risultati. Nella composizione delle coppie si può prevedere un bambino più esperto dell'altro. Si fa presente inoltre che per quanto riguarda l'ansia l'insegnante può/deve lavorare continuamente favorendo un'idea di "successo" in matematica diversa da quella usuale, che lo identifica con la risposta corretta data in tempi brevi.

Spunti per approfondire

Spunti per altre attività con gli studenti

Il calcolo della percentuale

Confrontando più tipi di tavolette, si può cogliere l'occasione per calcolare quanto cioccolato è contenuto, ad esempio, in una confezione che pesa 125 g e che ha una percentuale del 30% di cacao. Il precedente passaggio dalla **percentuale**[2] alla frazione è cruciale per il successivo calcolo.

Infatti: 30% → 30/100

Quindi il calcolo può diventare: 30/100 di 125 g, cioè:
125 : 100 = 1,25
1,25 x 30 = 37,50

Il 30% di 125 g è 37,50 g.

[2] Un aspetto che permette ulteriori approfondimenti è la presenza in commercio di confezioni di cioccolato con la percentuale di cacao espressa da un numero maggiore del peso della confezione (ad esempio: confezioni da 20 g con il 45% di cacao). La stranezza della situazione consente di mettere ancora una volta in gioco il rapporto fra grandezza che si misura e grandezza relazionale, mostrando l'utilità della percentuale. Infatti, confrontando confezioni di peso diverso, il dato relativo del peso del cacao potrebbe fornire indicazioni errate. Ad esempio nella tavoletta da 20 g (45% di cacao) ci sono 9 g di cacao, mentre in quella da 100 g (30% di cacao) ce ne sono 30: sarebbe errato ritenere che nella seconda confezione c'è più cacao. E' il significato di percentuale come "relazione fra la quantità di cacao e la quantità totale di cioccolato" che consente di argomentare le ragioni dell'errore: infatti consente di pareggiare la quantità totale (confrontando cioè tutto su 100) e di comprendere che la confezione più piccola avrebbe 45 g di cacao su 100 di cioccolato, mentre la tavoletta più grande contiene 30 g di cacao su 100 di cioccolato.

Altre situazioni interessanti che avviano alla comprensione del concetto di proporzionalità sono quelle in cui si sperimenta, anche attraverso il gusto, che la quantità di zucchero o sale che si scioglie in acqua determina la dolcezza o la salinità in relazione a quanta acqua abbiamo usato.

Prendiamo ad esempio il problema dello zucchero.

Ho due contenitori. uno grande e uno piccolo; in quello grande verso 12 bicchieri di acqua (1200 ml) e 4 cucchiai di zucchero, nel piccolo verso 6 bicchieri (600 ml) di acqua e 3 cucchiai di zucchero.

Quale contenitore contiene la bevanda più dolce? Perché?

Come faccio a farle diventare ugualmente dolci?

Risolvi il problema e fai una rappresentazione.

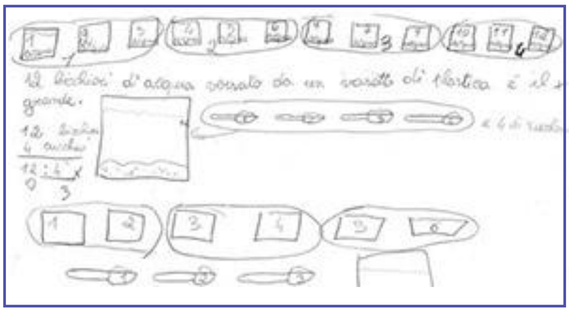
Alcuni bambini penseranno che sia più dolce la bottiglia piccola perché ha poca acqua e molto zucchero, invece la bottiglia grande ha molta acqua e anche molto zucchero, però l’acqua è proprio molta e lo zucchero si disperde nell’acqua.

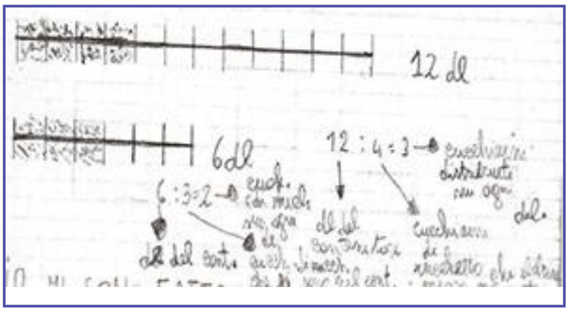
La bottiglia piccola ha poca acqua: anche se lo zucchero è di meno, non si disperde nella bottiglia.

Nella bottiglia grande l’acqua è troppa e lo zucchero si disperde. Si vede anche dalla differenza di colore dell’acqua: nella bottiglia piccola il colore è quasi giallo.

Data la situazione, l’acqua si può assaggiare per capirne la “dolcezza”. Ognuno però ha il suo gusto: come si potrebbe fare a misurare la dolcezza (analogamente, se si usano acqua e sale, si potrebbe misurare la salinità)?

Sarà indispensabile richiedere un disegno che spieghi il ragionamento; alcune possibili rappresentazioni[3] potranno essere le seguenti.





Come detto più volte, sarà utile richiedere una rappresentazione libera che spieghi il ragionamento fatto nell’affrontare il problema. Sarà conveniente poi, proporre una rappresentazione in tabella dalla quale si potrà anche arrivare ad un grafico nel piano cartesiano, se lo si ritiene opportuno secondo i tempi e il percorso della classe.

Contenitore A

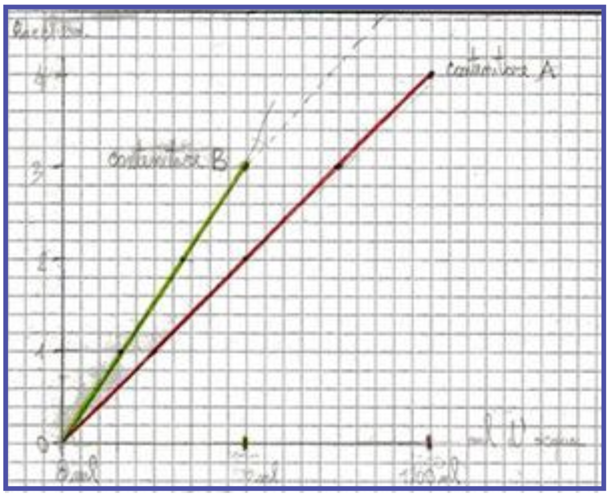
Bicchieri di acqua	Cucchiai di zucchero
12	4
24	8
36	12

Contenitore B

Bicchieri di acqua	Cucchiai di zucchero
6	3
12	6
18	9

[3] I disegni provengono da una classe del 70° Circolo di Napoli dove l’esperienza è stata fatta.

Nella figura che segue è illustrata una rappresentazione sul piano cartesiano: in ascissa è riportata la quantità di acqua e in ordinata la quantità di zucchero. Si inviteranno i bambini ad osservare i due grafici e ad esplicitare che cosa si può capire da essi.



Prove di verifica

Algoritmo per svuotamento

1) Nei quesiti che seguono esegui la divisione applicando l'algoritmo per svuotamento. Su una pista di atletica si devono percorrere 1200 metri. Ogni bambino facendo una staffetta percorre 300 metri. Quanti bambini sono necessari per completare il percorso?
Il costo globale di una gita scolastica è di € 342 e la spesa deve essere divisa tra 18 alunni. Quanto paga ogni alunno?

____
____
____

2) Risolvi il seguente problema: una pubblicità per un fuoristrada afferma che il prezzo è di € 32000 e che lo si può pagare in 24 comode rate mensili da € 1600 ciascuna. Quanto si paga il fuoristrada pagandolo a rate? Quanto ti chiedono in più per la "comodità" delle rate? Ritieni conveniente questa offerta? Cerca di capire con quante rate raggiungi il prezzo di 32000.

____
____
____

Ricette e proporzionalità

Per offrire spunti di verifica su questo tema di apprendimento, riportiamo alcune domande dalle prove INVALSI degli anni passati.

1) Per fare una crostata per 8 persone utilizzo, tra gli altri ingredienti, 240 grammi di farina e 160 grammi di burro. Se impasto 360 grammi di farina e 240 grammi di burro, per quante persone sarà la crostata?

____

____

____

2) In media il costo di una tavolette di cioccolata da 100 grammi è 1,50 euro. Indica per ciascuna tavoletta descritta nella tabella, se costa meno o più della media.

Costa meno della media	Costa più della media
a. Una tavoletta da 200 g che costa 3,40 euro.	
b. Una tavoletta da 125 g che costa 3 euro.	
c. Una tavoletta da 500 g che costa 3,50 euro.	

3) Paolo versa 4 cucchiaini di zucchero in un bicchiere che contiene 200 ml di acqua. Assaggia e dice: “Così mi piace!”.
Ha a disposizione un barattolo di zucchero e una brocca che contiene 1000 ml di acqua. Come può fare per rendere l’acqua della brocca dolce come quella del bicchiere?

a) Deve mettere nella brocca 20 cucchiaini di zucchero.
b) Deve mettere nella brocca 12 cucchiaini di zucchero.
c) Deve mettere nella brocca 8 cucchiaini di zucchero.
d) Deve mettere nella brocca 4 cucchiaini di zucchero.

4) La maestra ha portato questa ricetta. I bambini della classe sono 24 e vogliono mangiare 3 palline a testa; come devono modificare la ricetta?

Palline di cocco

Ingredienti

100 g di zucchero

3 chiare d'uovo

una confezione di cocco (500g)

Queste quantità sono per circa 35 palline

Procedura

1) Pesare 100 g di zucchero
2) Separare le chiare dal rosso
3) Montare le chiare
4) Aggiungere lo zucchero alle chiare e mescolare
5) Aggiungere il cocco e mescolare
6) Fare le palline grandi come noci
7) Metterle sulla teglia, distanti tra loro, con sotto la carta da forno
8) Mettere in forno caldo a 180º per 15 minuti

Scheda prove di verifica

Risorse

Bibliografia

Guidoni, P., Iannece, D., Tortora, R. La formazione matematica dei futuri maestri, 2003, appunti ed esempi di attività, progetto CNR, dal sito internet http://didmat.dima.unige.it/progetti/CNR/napoli/present.html

Iannece, D., Tortora, R. The evolution of graphic representations in a Vygotskijan perspective, 2004, Proceedings of CERME 3, Bellaria, dal sito internet http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_tortora_cerme3.pdf

Malara, N.A., Ponzi, S. Ragionamenti intuitivi di allievi di fronte a problemi di proporzionalità, 2005 mag., pag. 245.

Mariotti, M.A., Nello, M.S., Marino, M.S. Il ragionamento proporzionale nei ragazzi di 13-14 anni, (1° e 2° parte), 1988 feb., pag 105, e apr. pag 313.