Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
MIUR

Una crescita esponenziale sotto controllo

di P. Accomazzo, G. Mayer, N. Nolli, D. Paola

Area tematica

Relazioni e funzioni

Autori

Pierangela Accomazzo, Giovanna Mayer, Nicoletta Nolli, Domingo Paola

Ordine di scuola

Scuola secondaria di secondo grado - secondo biennio

Tempo medio per svolgere il percorso

10 ore

Indice

Scheda generale

Nucleo tematico

Relazioni e funzioni

Autori

P. Accomazzo, G. Mayer, N. Nolli, D. Paola

Tematica affrontata

Introduzione delle funzioni esponenziali dal discreto al continuo e analisi delle loro variazioni.

Descrizione

Si studiano in diversi contesti le successioni esponenziali guidando gli studenti a individuare nel rapporto costante di due elementi successivi la loro caratteristica; l'analisi delle differenze prime della successione guiderà gli studenti a scoprire come anche le differenze prime siano descritte da una successione esponenziale. La metodologia utilizzata verrà poi applicata alle funzioni esponenziali continue - introdotte e studiate a partire da un problema reale - attraverso il rapporto incrementale della funzione. La variazione del rapporto incrementale viene quindi studiata sia numericamente che graficamente riconoscendo in essa ancora una funzione esponenziale. I molteplici campi - economico, biologico, fisico - in cui si applicano modelli esponenziali possono essere considerati un punto di partenza motivante per l'avvio allo studio delle crescite e delle funzioni esponenziali. A partire dall'analisi di modelli discreti, si definiscono le proprietà caratteristiche delle successioni esponenziali, passando poi all'esame di modelli continui, che consentono di definire la funzione esponenziale come quella funzione la cui velocità di crescita è proporzionale alla funzione stessa.

Ordine di scuola

Secondo biennio di una scuola secondaria di secondo grado di qualunque ordine scolare.

Tempo medio

10 ore

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 4 del 16/01/2012, Direttiva n. 5 del 16/01/2012) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Obiettivi specifici di apprendimento

Relazioni e funzioni

Studierà le funzioni elementari dell'analisi e dei loro grafici, in particolare [le funzioni polinomiali, razionali, circolari], esponenziale [e logaritmo]. Apprenderà a costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, [nonché di andamenti periodici], anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo. Non sarà richiesta l'acquisizione di particolare abilità nella risoluzione di equazioni e disequazioni in cui compaiono queste funzioni, abilità che sarà limitata a casi semplici e significativi.

Linee Guida per gli Istituti Professionali e Tecnici

Conoscenze

- [Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo]; funzioni esponenziali [e logaritmiche; funzioni periodiche].
- Costruire modelli, sia discreti che continui di crescita lineare ed esponenziale [e di andamenti periodici].

Abilità

- Risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi a [funzioni goniometriche], esponenziali, [logaritmiche e alla funzione modulo] con metodi grafici o numerici e anche con l'aiuto di strumenti elettronici.

La parte tra parentesi quadre fa riferimento a tematiche non sviluppate nella presente attività.

Prove INVALSI

a.s. 2012/2013 - Domanda D3

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D3. **Una popolazione batterica aumenta nel tempo con un tasso di crescita costante (cioè la variazione percentuale del numero di batteri tra un qualunque giorno e il giorno precedente è costante).**
La seguente tabella riporta il numero *N* di milioni di batteri della popolazione al trascorrere dei giorni:

numero di giorni trascorsi	0	1	2	3	4	5	...
numero *N* di batteri (in milioni)	1000	1100	1210	1331	...	...	

a. Quale fra i seguenti grafici può rappresentare l'andamento del numero *N* di batteri al variare del tempo *t*, in almeno 20 giorni?

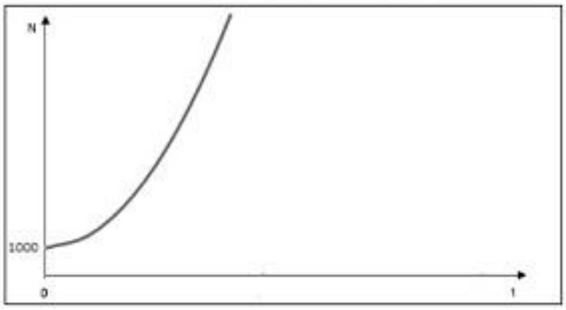


Grafico 1

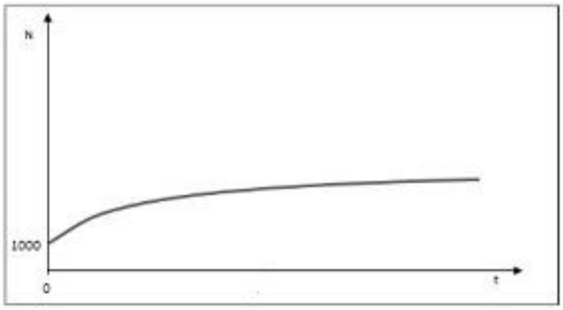


Grafico 2

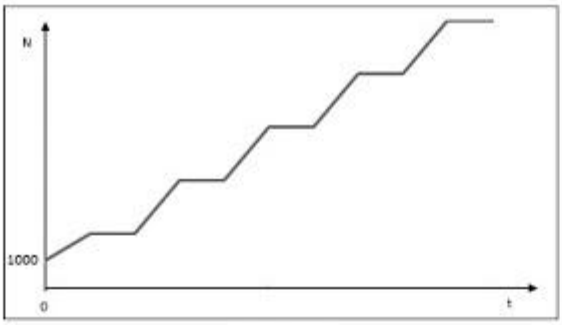


Grafico 3

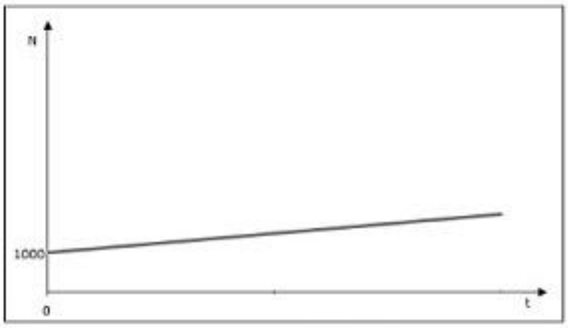


Grafico 4

A. ☐ Il grafico 1

B. ☐ Il grafico 2

C. ☐ Il grafico 3

D. ☐ Il grafico 4

b. Quanti milioni di batteri ci saranno il quinto giorno?

Risposta: .... milioni di batteri

Soluzione INVALSI:

D3_a: A

D3_b: 1611, oppure 1610, oppure un qualunque numero con la virgola compreso tra 1610 e 1611 milioni di batteri.

Commento

Il primo item richiede competenze di conversione dal registro di rappresentazione numerica al registro di rappresentazione grafica. Gli studenti, infatti, dovrebbero riconoscere che l'informazione "la popolazione cresce con tasso costante" (fornita sia all'inizio del testo della domanda, sia nella tabella) si traduce, nel registro di rappresentazione grafica, in un grafico crescente con la concavità rivolta verso l'alto. Non è necessario riconoscere, per rispondere all'item **a**, che si tratta di una crescita esponenziale, ma solo che la successione "cresce sempre più". La precisazione "in almeno 20 giorni" serve a evitare che gli studenti possano scegliere il grafico 4 pensando alla rappresentazione dell'andamento esponenziale in un intorno vicino all'istante iniziale (t= 0).

Gli studenti possono utilizzare diverse strategie per rispondere all'item **b**. Rimanendo all'interno del registro numerico possono prima calcolare la variazione percentuale (10%) e poi utilizzarla per calcolare, successivamente, il numero di batteri presenti al quarto e al quinto giorno. L'arrotondamento corretto porterebbe a 1610,51 milioni di batteri, ma, come sopra precisato, si può accettare come risposta esatta qualunque numero con la virgola compreso tra 1610 e 1611 milioni di batteri.

Un'altra possibilità è quella di calcolare i numeri indice a base mobile, cioè il rapporto (costante e uguale a 1,1) tra il numero di batteri presenti in un qualunque giorno e quello dei batteri presenti il giorno precedente. A questo punto gli studenti possono calcolare, successivamente, il numero di batteri presenti al quarto e al quinto giorno.

Un'altra possibilità è quella di determinare la legge che esprime l'evoluzione della popolazione $N(t) = 1000 \cdot 1{,}1^{t}$ e calcolare N(5)

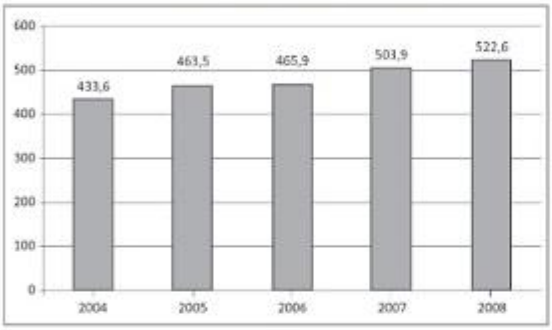
a.s. 2011/2012 - Domanda D9

Scuola secondaria di II grado – Classe II

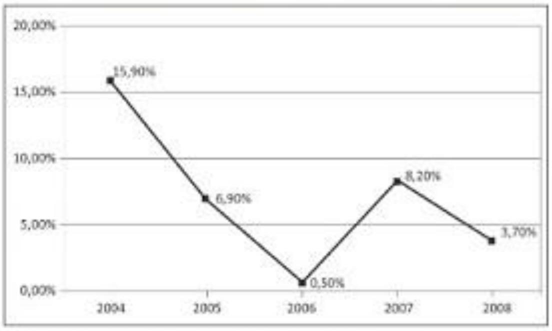
Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell’unità.

D9. **Osserva i seguenti grafici relativi alle operazioni effettuate con carte di credito dal 2004 al 2008.**

Numero di operazioni (in milioni) effettuate con carta di credito



Variazione percentuale annua del numero di operazioni effettuate con carta di credito



(Fonte: Osservatorio sulle carte di credito. Assofin – Crif Decision Solutions – Gfk Eurisko)

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Il numero di operazioni effettuate con carte di credito è diminuito dal 2004 fino al 2006, poi è aumentato e, successivamente, è di nuovo diminuito fino al 2008.	☐	☐
b.	I due grafici sono in contraddizione perché il primo mostra una continua crescita nel tempo, mentre il secondo no.	☐	☐
c.	L’aumento del numero di operazioni effettuate con carte di credito che si è avuto dal 2006 al 2007 è stato superiore all’aumento che si è avuto dal 2007 al 2008.	☐	☐
d.	Nel 2006 il numero di operazioni effettuate con carte di credito si è quasi azzerato.	☐	☐

Soluzione INVALSI:

D9_a: Falsa

D9_b: Falsa

D9_c: Vera

D9_d: Falsa

Commento

Per rispondere correttamente ai quattro item, gli studenti devono saper confrontare e decodificare due grafici che rappresentano dati espressi in modo differente. Più in dettaglio, lo studente deve comprendere che il primo grafico fornisce informazioni sul numero assoluto di operazioni effettuate con carte di credito nei vari anni. Si tratta quindi di saper leggere una serie storica di valori assoluti. Il secondo grafico fornisce invece informazioni sulla variazione percentuale.

Il confronto fra le differenti informazioni suggerite dalla lettura dei due grafici può comportare, per gli studenti, alcune criticità come, per esempio, le due seguenti:

- capire che la decrescita di una variazione percentuale non corrisponde necessariamente a una diminuzione dei valori assoluti. Come si può vedere nel secondo grafico, il grafico della variazione percentuale decresce dal 2007 al 2008, ma il numero di operazioni effettuate con carta di credito nel 2008 è maggiore di quello del 2007 (come mostra il primo grafico);
- comprendere che la decrescita del secondo grafico indica semplicemente che l'aumento percentuale dal 2007 al 2008 è stato inferiore a quello che si è avuto dal 2006 al 2007.

L'assenza di comprensione dei due punti precedenti potrebbe portare gli studenti a pensare che le informazioni contenute nei due grafici non siano coerenti fra loro. In modo analogo gli studenti che confondono le informazioni fornite dal secondo grafico con le informazioni che riguardano il numero assoluto di operazioni effettuate con carta di credito, sono indotti a pensare che nel 2006 il numero di operazioni tenda ad azzerarsi; invece il secondo grafico informa che il numero di operazioni effettuate nel 2006 è quasi uguale al numero di operazioni effettuate nel 2005.

a.s. 2011/2012 - Domanda D20

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D20. **Luigi e Paolo investono la stessa somma di denaro. Dopo il primo anno, la somma investita da Luigi è aumentata del 10% e quella investita da Paolo è diminuita del 5%. Luigi e Paolo decidono di reinvestire per un altro anno ancora le somme ottenute dopo il primo anno. Nel secondo anno Luigi perde il 5%, mentre Paolo guadagna il 10%.**
Se Luigi e Paolo hanno investito inizialmente una somma di 1 000 euro ciascuno, quanto avrà ciascuno dei due alla fine del secondo anno? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta i risultati.

....

....

....

Luigi: .... euro

Paolo: .... euro

Soluzione INVALSI:

I anno (Luigi): 1000 + 0,1*1000 =1100

I anno Paolo: 1000 - 0,05*1000 =950

II anno Luigi: 1100 - 0,05*1100 =104

II anno Paolo: 950 + 0,1*950 =1045

Accettabili tutte le espressioni equivalenti alle precedenti, anche quando contengano qualche imprecisione di scrittura (ma non di calcolo). Accettabili, ovviamente, anche ragionamenti generali corretti che facciano riferimento al fatto che aumentare un dato valore del 10% equivale a moltiplicarlo per 1,1 e che diminuire un dato valore del 5% equivale a moltiplicarlo per 0,95. Per la

proprietà commutativa della moltiplicazione è indifferente moltiplicare la somma investita s prima per 1,1 e poi per 0,95 (situazione di Luigi) o moltiplicare prima per 0,95 e poi per 1,1 (situazione di Paolo): 1,1*0,95*s = 0,95*1,1*s = 1045*s. In questo caso si può evitare qualunque calcolo, che può essere eseguito solo per completare la risposta, usando la calcolatrice:
Luigi: 1045 euro
Paolo: 1045 euro.

Commento
Gli studenti che sono in grado di utilizzare un modello moltiplicativo (aumentare del 10% equivale a moltiplicare per 1.1; diminuire del 5% equivale a moltiplicare per 0.95) sono sicuramente avvantaggiati per trovare velocemente la risposta corretta. Il passaggio dal modello additivo a quello moltiplicativo nei problemi di variazioni di percentuali potrebbe rientrare in quelle azioni di “manutenzione”, consolidamento e approfondimento degli argomenti affrontati nel primo ciclo, che caratterizzano una didattica attenta alla gestione degli opportuni elementi di continuità e dei necessari elementi di discontinuità con i cicli scolastici precedenti.

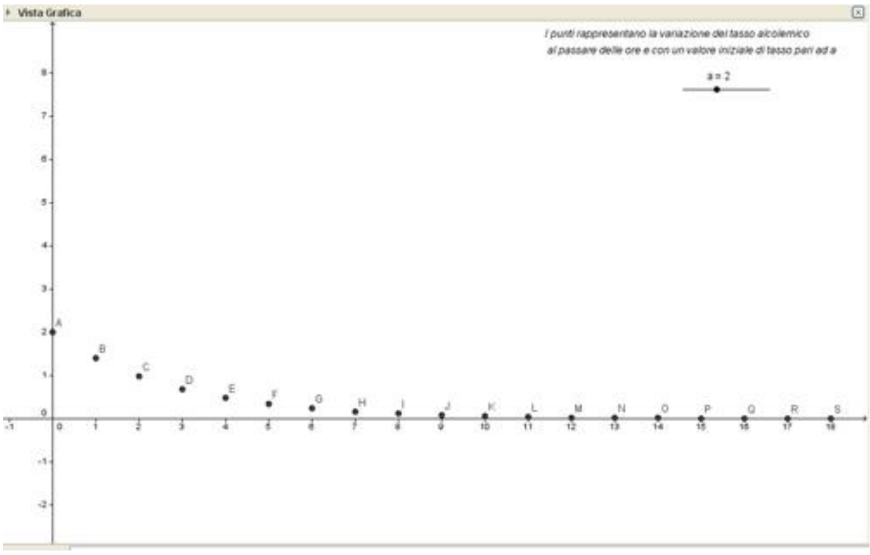
Attività 1

Fase 1

Nella scheda Crescite si avvia una riflessione sulle funzioni esponenziali discrete caratterizzandole con la costanza del rapporto tra due termini successivi. L'attività, prendendo spunto dalla crescita di Alice nel libro "Alice nel paese delle meraviglie", guida gli studenti alla determinazione della legge $y=2^n$ e a una prima riflessione sulle caratteristiche di una successione esponenziale. Si propone quindi un secondo problema che richiede la determinazione di un montante e la rappresentazione grafica della sua dipendenza dal tempo. Si chiede quindi agli studenti di confrontare i grafici delle due successioni in modo tale da indurli a ipotizzare l'appartenenza alla stessa famiglia di funzioni. Riconoscendo l'analogia con l'esercizio precedente, gli studenti dovrebbero individuare la costanza del rapporto tra due valori successivi come caratteristica di una successione esponenziale.

Fase 2

Con la scheda Decrescite si propone agli studenti una successione esponenziale con base compresa tra 0 ed 1 e quindi decrescente. Si prende sempre spunto da "Alice nel paese delle meraviglie" per avviare una prima analisi che sarà in seguito approfondita con un problema sull'evoluzione del **tasso alcolemico** nel sangue in seguito a un'assunzione di una bevanda alcolica.



Tasso alcolemico [file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/DbqTeCPU)

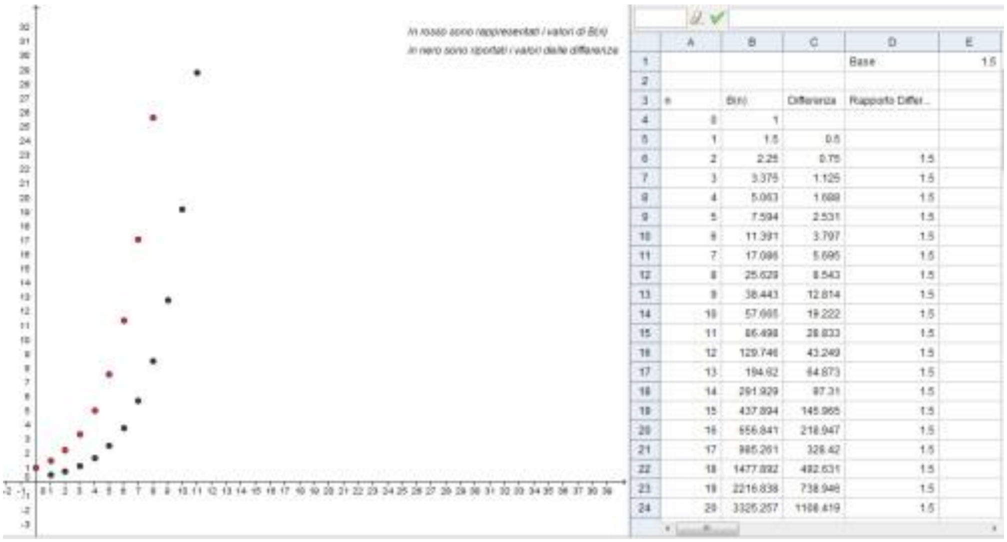
Agli studenti può essere anche proposto il file di geogebra tasso alcolemico, in cui con uno slider è possibile variare il tasso iniziale. Il file, oltre a favorire la risposta all'ultima domanda della scheda, evidenzia chiaramente come il grafico varia al variare delle condizioni iniziali.

Fase 3

Nella scheda di lavoro La variazione, a partire dal problema: *I batteri si riproducono per scissione, ovvero ogni batterio si "divide" in 2 nuovi batteri. Supponendo di osservare il procedimento di scissione a partire da 1 batterio, scrivi una legge che permetta di calcolare il numero B di batteri al variare del numero n di scissioni.*

Si chiede agli studenti di studiare la successione delle differenze prime e di notare che anch'essa varia esponenzialmente. L'obiettivo è quello di condurre gli studenti a osservare che la successione delle differenze prime varia anch'essa con legge esponenziale. In questo caso (base 2), la successione delle differenze prime varia esattamente come la legge *B(n)* iniziale. Con una base a diversa da 2 la successione delle differenze prime varia sempre come una legge esponenziale del tipo $k \cdot a^x$ (*k* diverso da 1).

Nella scheda si chiede ai ragazzi di costruire un file con geogebra, affiancando alla vista grafica il foglio di calcolo. L'indicazione di utilizzare geogebra è legata a una maggiore chiarezza del grafico che si ottiene rispetto a una rappresentazione inserita in un foglio di calcolo.



	A	B	C	D	E
1				Base	1.5
2					
3	n	B(n)	Differenza	Rapporto Differ...	
4	0	1			
5	1	1.5	0.5		
6	2	2.25	0.75	1.5	
7	3	3.375	1.125	1.5	
8	4	5.063	1.688	1.5	
9	5	7.594	2.531	1.5	
10	6	11.391	3.797	1.5	
11	7	17.086	5.695	1.5	
12	8	25.629	8.543	1.5	
13	9	38.443	12.814	1.5	
14	10	57.665	19.222	1.5	
15	11	86.498	28.833	1.5	
16	12	129.746	43.249	1.5	
17	13	194.62	64.873	1.5	
18	14	291.929	97.31	1.5	
19	15	437.894	145.965	1.5	
20	16	656.841	218.947	1.5	
21	17	985.261	328.42	1.5	
22	18	1477.892	492.631	1.5	
23	19	2216.838	738.946	1.5	
24	20	3325.257	1108.419	1.5	

[Variazioni](#) [file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/TVuAP5cF)

Attività 2

Fase 1

Agli studenti viene proposto il seguente problema:

Il decadimento radioattivo

Gli atomi di alcune sostanze (dette radioattive) emettono spontaneamente radiazioni trasformandosi in atomi diversi. Se un minerale contiene oggi una massa M di sostanza radioattiva, dopo un certo tempo (detto tempo di dimezzamento e caratteristico della sostanza) metà di questa massa subisce il decadimento radioattivo e metà rimane inalterata; per esempio, il tempo di

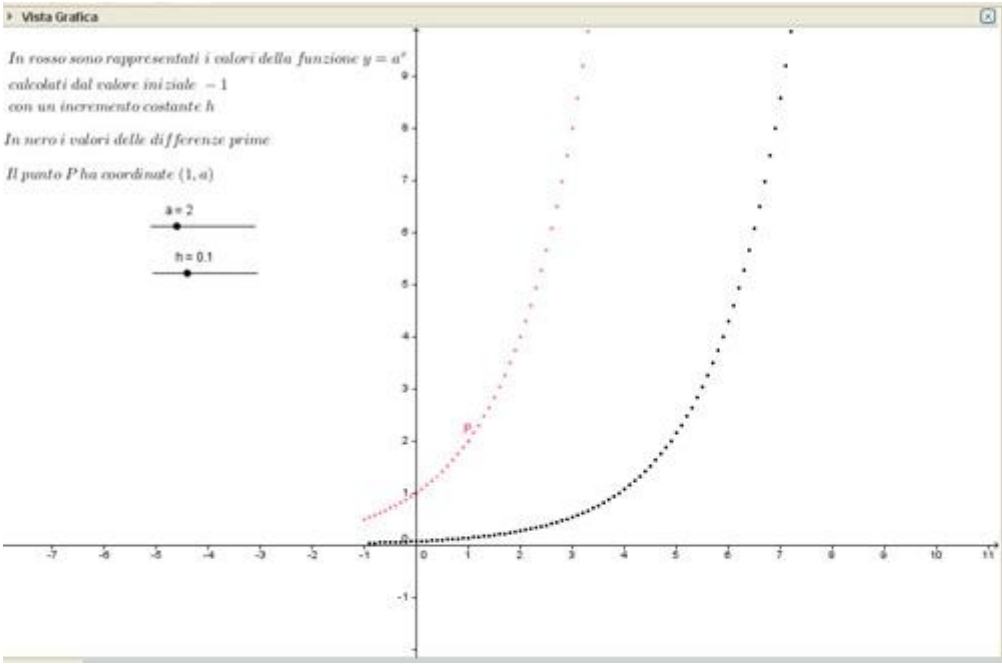
*dimezzamento del Carbonio 14 è di circa 6000 anni. Scrivi una legge che permetta di calcolare, data una massa iniziale M0, la massa **M** al variare del numero **t** dei tempi di dimezzamento. Supponendo di avere una massa iniziale di 1 kg rappresenta graficamente la legge da te determinata.*
Supponendo che la massa iniziale fosse 1 kg di carbonio 14:

- *quanto tempo prima la massa di sostanza radioattiva era il doppio? Posso ritrovare questo momento nel grafico?*
- *Quanto sarà la massa dopo 2000 anni?*

Attraverso il problema l'insegnante guida gli studenti al passaggio da una successione esponenziale a una funzione esponenziale definita nel continuo.

Fase 2

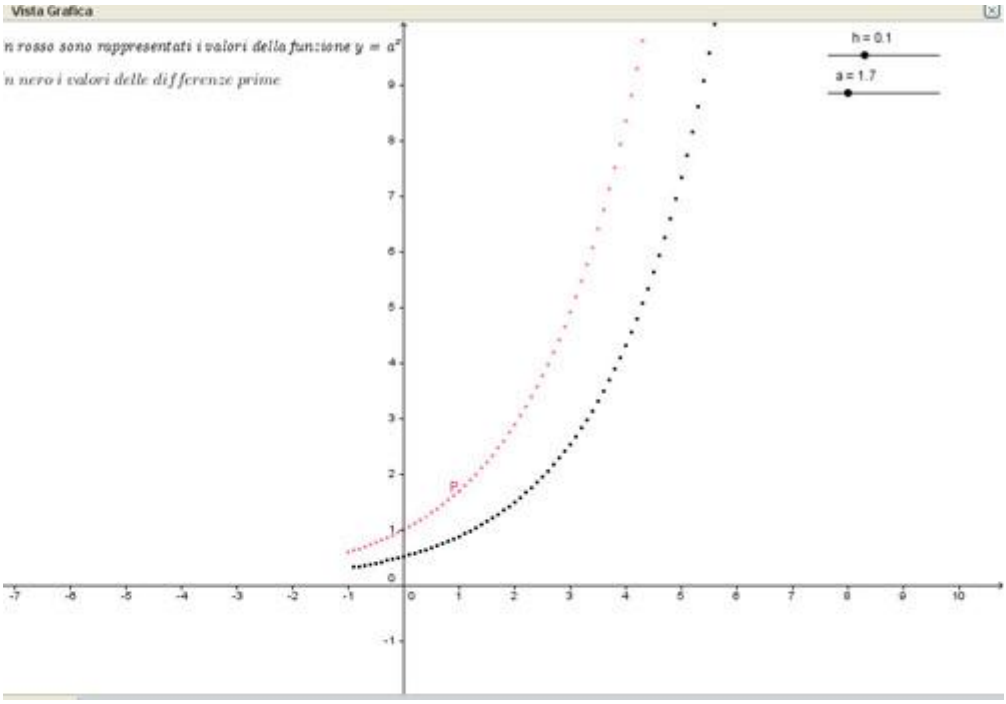
Si propone agli studenti il file di geogebra incrementi differenze in cui alla vista grafica è affiancato il foglio di calcolo. Sul foglio di calcolo la prima colonna riporta la successione dei valori della variabile indipendente x ottenuti a partire da un valore iniziale $x_0=-1$ a cui si è assegnato un incremento costante h; la seconda colonna riporta i corrispondenti valori della funzione a^x; la terza colonna riporta la successione delle differenze prime della seconda colonna. Nella finestra grafica vengono rappresentate sia la funzione $y = a^x$, sia la funzione che, al variare di x, assume i valori riportati nella colonna delle differenze prime. Sia l'incremento h, sia la base della funzione possono essere variati con degli slider.



Incrementi differenze [file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/vhnQRXyG)

Il file incrementi rapporti incrementali riporta i grafici relativi al foglio contenente la funzione rapporto incrementale per *h* fissato. Gli studenti osservano che le differenze prime sembrano avere ancora un andamento esponenziale e, analogamente a quanto visto nel discreto, possono verificare la congettura calcolandone il loro rapporto. Lasciando fissa la base e variando *h* si nota che la funzione che descrive le differenze viene molto modificata mentre la funzione esponenziale iniziale ha una rappresentazione sempre più precisa senza subire modifiche significative. Si suggerisce qui di stimolare una discussione tra i ragazzi sulla motivazione di questa differenza di comportamento che li porti a riflettere su come sia più opportuno, per studiare la velocità di variazione della funzione, studiare il rapporto $\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ invece delle differenze prime.

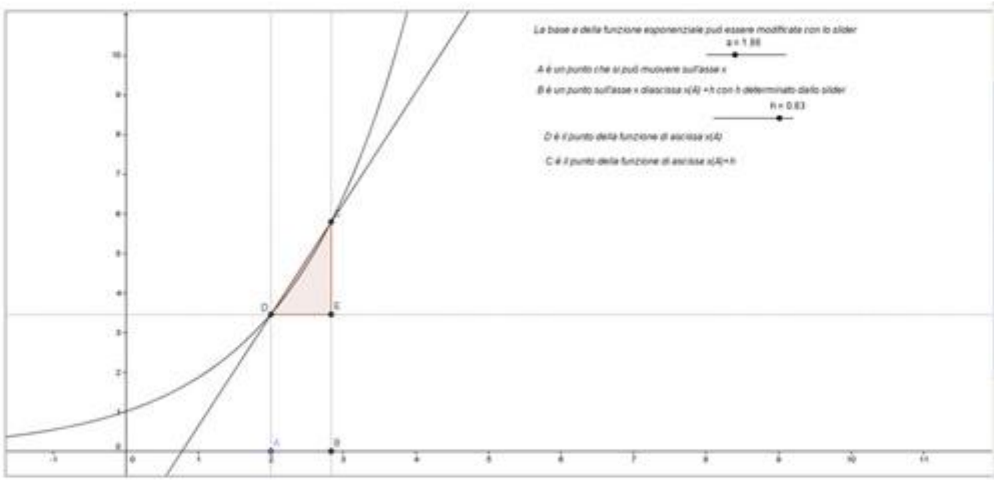


Incrementi rapporti incrementali [file geogebra]
Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/QTsfJp4b)

Riesaminando i grafici gli studenti potranno notare come i due andamenti siano ora molto simili e che, variando la base, nel passaggio tra *a=2* e *a=3* la funzione che esprime la variazione dei rapporti incrementali "sorpassa" la funzione esponenziale stessa. Dovrebbero quindi intuire che nel continuo esiste una base, compresa fra 2 e 3, che svolge un ruolo analogo a quello che, nel discreto, svolgeva la base 2.

Fase 3

Si vuole ora passare più propriamente alla funzione continua $y=a^x$ (passaggio che, in qualche modo, dovrebbe già essere favorito dal fatto che l'incremento *h* può essere reso piccolo a piacere) e dare significato ai rapporti incrementali utilizzati. A tal fine si propone agli studenti di lavorare con il file http://www.geogebratube.org/student/m6022 e di rispondere alle domande proposte (si veda l'applet proposto).

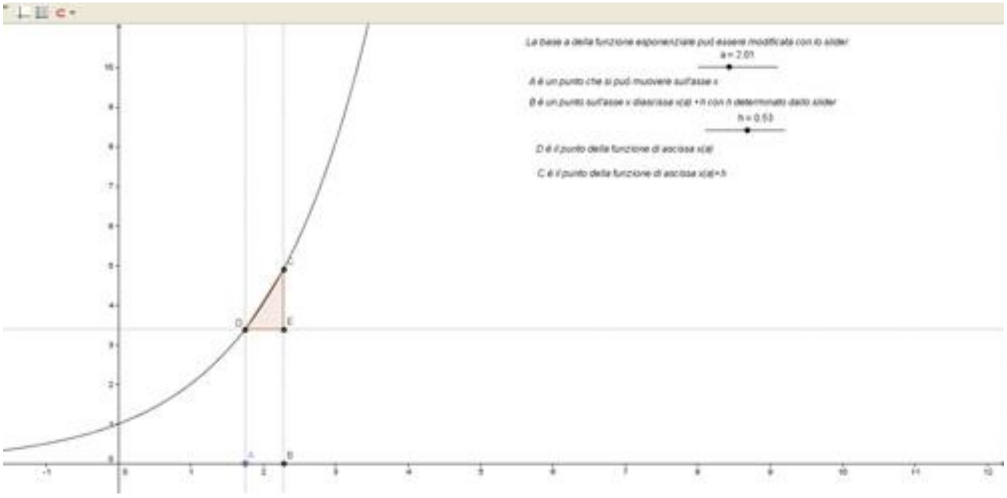


L'insegnante discute con gli studenti le varie osservazioni fatte fino a giungere almeno a due conclusioni importanti:

− al decrescere di *h* il segmento CD tende a degenerare in un punto e la retta CD da secante tende a diventare tangente;

− Il rapporto dei segmenti CE e ED rappresenta la pendenza della retta CD.

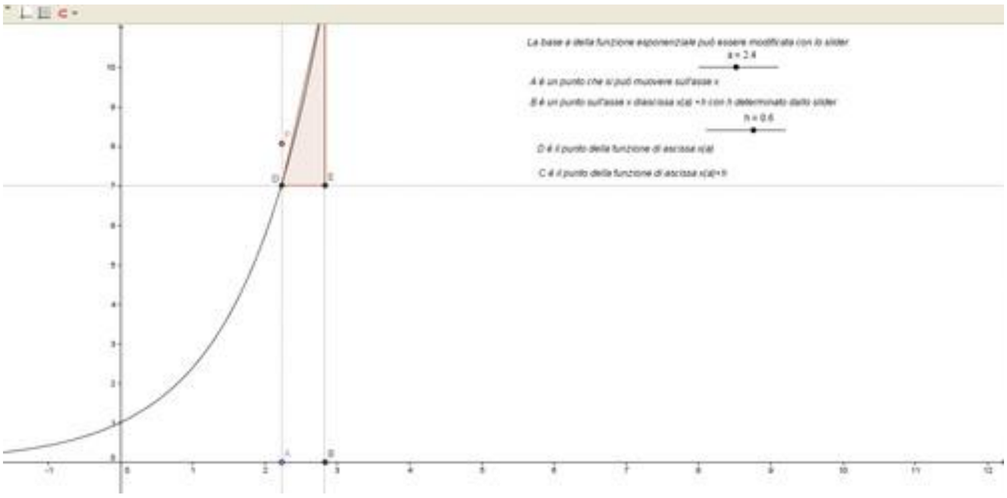
Gli studenti sono ora invitati a lavorare con il file di geogebra **esponenziale 1**, che riporta quanto visto nell'applet senza però la retta CD.



Esponenziale 1 [file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/Nmj5QPQz)

L'insegnante chiede loro di inserire nel file un punto P (di ascissa uguale all'ascissa di A) che esprima la variazione dei rapporti incrementali visti nella fase precedente. Al muovere del punto A il punto P descrive la variazione dei rapporti incrementali; tanto più l'incremento *h* è piccolo tanto più la funzione rappresentata approssima la derivata della funzione esponenziale. Gli studenti possono visualizzare il grafico descritto dal punto P indicando tra le proprietà del punto l'opzione "traccia" e, al muovere del punto A, il punto P lascia traccia della sua posizione. Il file che gli studenti dovrebbero costruire è **esponenziale 2**; in esso si vede bene quanto h influisca sul grafico. Ad esempio con *h* = 0.6 il punto P si trova sopra alla funzione esponenziale già con *a* = 2.4; se si lascia inalterata la base e si diminuisce il valore di *h*, si vede come il punto P "scende" rapidamente sotto la funzione esponenziale.



[Esponenziale 2](#) [file geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube (http://www.geogebra.org/m/GMnPSV5P)

Anche in questo caso si vede bene che vi è un momento in cui il grafico del punto P "sorpassa" la curva; la sua determinazione dipende dal valore di *h*.

Indicazioni metodologiche

Attività 1

Fase 1

Nell'esercizio sull'altezza di Alice è stata inserita una domanda in cui gli studenti devono decidere quale soluzione accettare. Infatti non è possibile arrivare all'altezza richiesta con un numero intero di pasticcini e quindi gli allievi dovrebbero discutere se Alice ne debba mangiare uno o due. Potrebbero anche proporre di fargliene mangiare uno e mezzo (che sarebbe la soluzione) ma si può dire loro che non è possibile spezzare il pasticcino proprio per ribadire l'ambiente numerico su cui si sta lavorando.

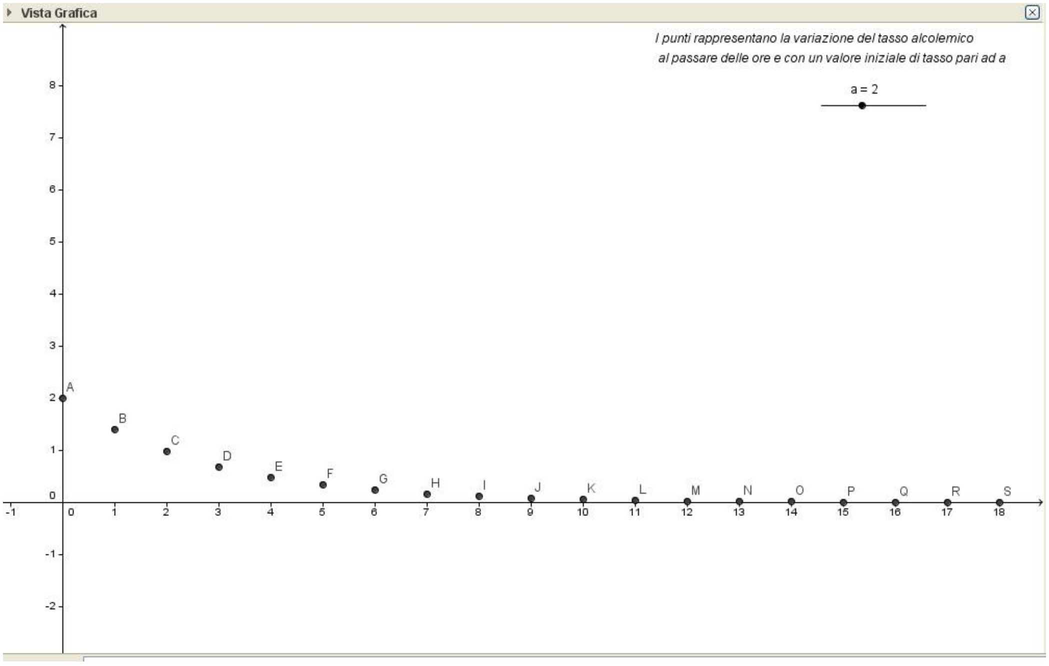
Nell'esercizio sul montante si ipotizza un interesse del 10% che ovviamente non è realistico ma in questo modo si ottiene un grafico più simile al grafico dell'esercizio precedente e quindi si aiutano gli studenti a congetturare che l'andamento possa essere lo stesso. Volendo un esempio più aderente alla realtà si può proporre loro la scheda con un tasso del 3%, il cui andamento però potrebbe anche sembrare lineare; la congettura di linearità può poi essere confutata modificando il tasso portandoli così alla constatazione che l'andamento non è lineare. Si consiglia di condurre gli studenti anche a una definizione ricorsiva del montante, ossia a una legge del tipo $\begin{cases} M_0 = C \\ M_{k+1} = (1{,}1)M_k \end{cases}$

A questo scopo si può partire dalla formula che gli studenti hanno inserito nel foglio di calcolo che è del tipo " = *An+An*0,10*"; in essa mettendo in evidenza e sostituendo si arriva facilmente a $M(n) = C(1{,}10)^n$

Per un approfondimento sulle successioni definite in modo ricorsivo e i sistemi dinamici si veda l'attività "Concentrazione di un medicinale".

Fase 2

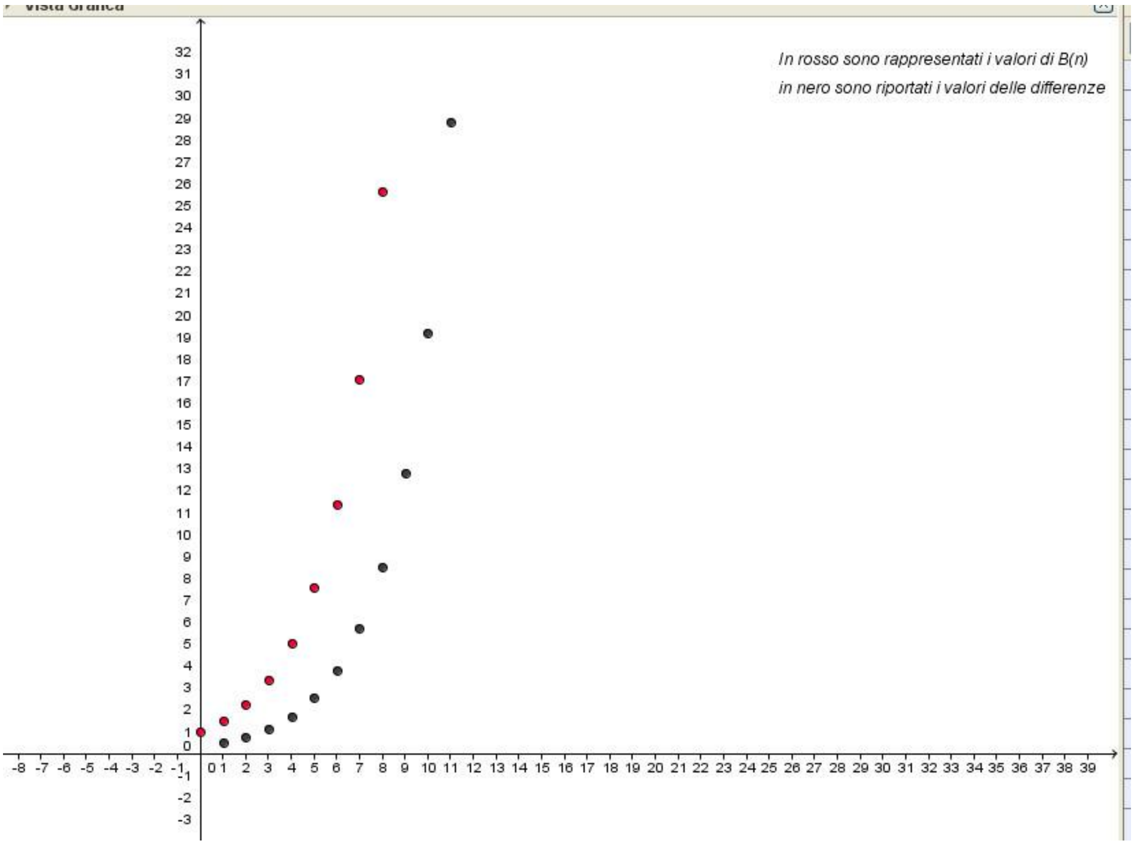
Si è scelto di proporre agli studenti una funzione esponenziale la cui base non sia una frazione del tipo $\frac{1}{n}$ per evidenziare che è la caratteristica di essere un numero compreso tra 0 ed 1 a modificare l'andamento della curva e non il fatto che la base sia frazionaria. Attraverso la richiesta successiva, di descrivere le caratteristiche della funzione rappresentata, l'insegnante può suggerire agli studenti di modificare la base della legge esponenziale così da evidenziare le differenze tra una legge esponenziale con base maggiore di 1 e una con base compresa tra 0 ed 1. L'analisi della funzione richiesta è per il momento di tipo qualitativo: gli studenti dovrebbero evidenziarne il carattere decrescente, la tendenza ad avvicinarsi al valore zero ma l'impossibilità di raggiungerlo ecc.



L'esercizio sul tasso alcolemico è stato introdotto per l'importanza che l'argomento ha in questa fascia d'età; esso potrebbe essere approfondito dagli studenti in collaborazione con l'insegnante di Scienze. La diminuzione del tasso non segue proprio una legge esponenziale, ma, con le ipotesi fatte nell'esercizio, i valori per le prime ore non sono molto differenti. In questo esercizio vengono introdotte, in analogia con la scheda precedente, domande che facciano riflettere sul carattere discreto della legge e sul significato dei punti su di essa. Le domande possono anche essere riscritte in modo simbolico così da evidenziarne la caratteristica di equazione (esponenziale o no a seconda della domanda posta).

Fase 3

Per avviare gli studenti a riflettere sulla variazione della legge affrontata è consigliabile partire dalla legge 2^n essendo in essa molto facile notare regolarità che poi portano alla scoperta che le differenze prime sono date ancora da una legge esponenziale. Questo potrebbe portare gli studenti a congetturare che le differenze prime siano sempre descritte da una legge esponenziale identica a quella data ma provando con altre basi gli alunni dovranno precisare la loro congettura. Sarà necessario guidarli - per esempio consigliando loro di rappresentare graficamente le differenze prime - verso la congettura corretta. Si potrebbe anche suggerire agli studenti di inserire nel foglio di calcolo una cella fissa per il valore della base così da poter agevolmente rappresentare i dati per molte basi come proposto nel file Variazioni **.**



In conclusione della scheda si chiede comunque di dare una dimostrazione formale di quanto verificato con i grafici e i calcoli. Data la legge $y=a^n$ la differenza D_k tra due elementi successivi è data da $D_k=a^k-a^{k-1}$ ed il rapporto $\frac{D_{k+1}}{D_k}$ è dato da $\frac{a^{k+1}-a^k}{a^k-a^{k-1}}$ che mettendo in evidenza e semplificando diventa $\frac{D_{k+1}}{D_k}=a$

Attività 2

Fase 1

Scrivendo la legge $M=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$ i ragazzi hanno ancora scritto una legge discreta, essendo *t* il numero dei tempi di dimezzamento; le domande poste, però, cominciano a dare significato alla legge anche per tempi di dimezzamento negativi o frazionari. Si suggerisce quindi di discutere con loro se la variabile *t* non possa essere resa continua e che cosa questo significhi e comporti. Una particolare riflessione potrà essere fatta per esponenti irrazionali a cui gli studenti non sanno ancora attribuire un significato.

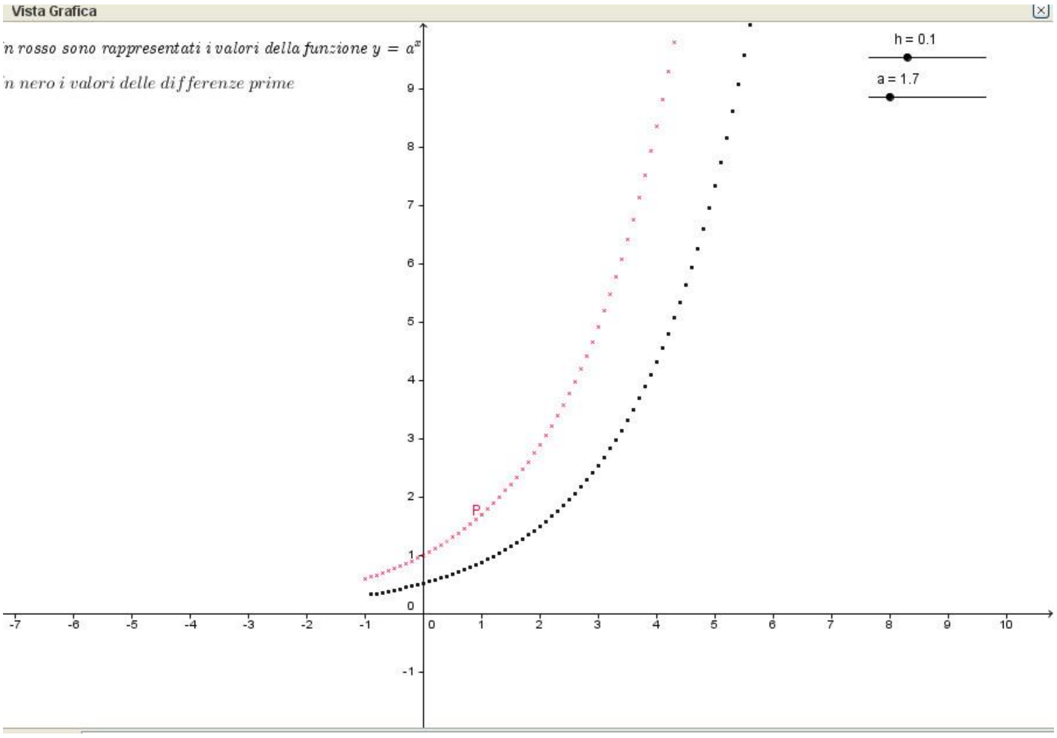
Fase 2

Lavorando con leggi esponenziali discrete le differenze prime erano calcolate automaticamente con incremento costante h=1; nel passaggio dal discreto al continuo occorre evidenziare che l'incremento può essere reso piccolo a piacere. Inoltre è bene cercare di precisare l'analogia tra le differenze prime, utilizzate nel discreto, per studiare la velocità di variazione e i rapporti incrementali, utilizzati nel continuo. Gli studenti dovranno essere guidati a riflettere che si sta cercando di valutare la "velocità di crescita" anche con analogie a conoscenze già acquisite (tassi di crescita, velocità….). La differenza tra il grafico delle differenze prime e il grafico dei rapporti incrementali può anche essere interpretata geometricamente: infatti detto G il primo e G' il secondo si ha che G' corrisponde a G con un omotetia della funzione di rapporto 1/h.

Fase 3

Agli studenti si può anche chiedere di costruire il file riportato nell'applet e stimolarli a riportare quanto visto nel file Incrementi rapporti incrementali utilizzando la funzione $y=a^x$ e non il foglio di calcolo. In questo caso dovranno essere guidati nel dare significato grafico alle grandezze $f(x+h)-f(x)$ e h collegando, attraverso l'osservazione del grafico, la pendenza della retta secante e il rapporto incrementale.

Nel file esponenziale 2 la ricerca del valore di a per cui il punto P coincide con la funzione esponenziale porta, con h=0.01, a un valore approssimato di a compreso tra 2.71 e 2.72 che può essere definito come una prima approssimazione del numero e caratterizzato come la base per cui la derivata (la funzione "velocità di variazione") coincide con la funzione stessa.



Spunti per approfondire

Spunti per un approfondimento disciplinare

Attività 1

Fase 3

La legge esponenziale descritta dalle differenze prime potrebbe essere esplorata a partire dal foglio di calcolo **successioni** in cui è stato inserito un coefficiente moltiplicativo per ottenere una successione del tipo *y=k(a)*^{n} . Riscrivendo la definizione ricorsiva della successione esponenziale vista nell'esercizio sul montante, $\begin{cases} Y_0 = k \\ Y_{k+1} = aY_k \end{cases}$,

le differenze prime possono essere scritte in modo ricorsivo $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$ ottenendo così la successione esponenziale *Dn=k(a-1)*a^{n-1}

Attività 2

Fase 1

A seconda della classe e del suo programma l'insegnante potrebbe sviluppare, attraverso il foglio di calcolo di geogebra e l'ausilio della rappresentazione grafica, la ricerca di una soluzione approssimata di un'equazione esponenziale.

Fase 3

Si possono qui fare alcune prime osservazioni sul collegamento tra l'andamento delle tangenti alla curva e il grafico della curva stessa. In particolare, per a compreso tra 0 ed 1, le variazioni diventano negative e una riflessione su questo fatto porta a caratterizzare le funzioni crescenti e decrescenti attraverso l'andamento della tangente alla curva.

Spunti per altre attività con gli studenti

L'energia dei terremoti

L'energia *E* rilasciata da un terremoto, in joule, è data da

$$E = hA^{\frac{3}{2}}$$

dove *A* indica l'ampiezza, in millimetri, dell'oscillazione misurata dal sismografo.
L'ampiezza *A* è a sua volta data da

$$A = k10^{M}$$

in cui *M* rappresenta la magnitudo del terremoto; i fattori *h* e *k* sono fattori di proporzionalità che dipendono dal luogo del terremoto.
Gli studenti possono effettuare una ricerca su internet per individuare i terremoti maggiori avuti in Italia, (ad esempio su http://www.corriere.it/cronache/09_aprile_06/terremoti_italia_secolo_061b0c4c-227a-11de-9ce1-00144f02aabc.shtml e comunque riportati nel file **terremoti Italia**), e, lavorando con un foglio di calcolo, determinare l'energia corrispondente ad ognuno di essi (ponendo sia *h* che *k* uguali ad 1) effettuandone poi la rappresentazione grafica.
Si può chiedere loro di determinare quale sia la differenza in termini di energia

tra terremoti di magnitudo diverse, o il rapporto tra l'energia liberata da un terremoto di magnitudo M_1 ed uno di magnitudo M_1+1, od anche a quale variazione di magnitudo corrisponda un terremoto che liberi un energia 10 volte maggiore ecc. Per rispondere a queste domande si potrà partire dalla rappresentazione grafica ma la difficoltà di rispondere in modo preciso renderà necessario utilizzare metodi simbolici aiutando gli studenti a dare significato alle equazioni esponenziali. L'ordine di grandezza dei numeri e la difficoltà di visualizzare i dati permette di introdurre le rappresentazioni semilogaritmiche. Questa, nei fogli di calcolo, è una delle opzioni date quando si costruisce un grafico; si può suggerire agli studenti di fare un secondo grafico inserendo l'opzione e ricercare la relazione in essa rappresentata. Una sintesi del lavoro che potrebbe essere svolto con gli studenti è nel file terremoti Italia.

Elementi per prove di verifica

1. Sistemando la casa di nonno Carlo è stato trovato un libretto postale di 40 anni prima in cui il nonno aveva versato 1.000.000 £. Il personale dell'ufficio postale ha proposto di estinguere il libretto riconoscendo un tasso di interesse del 2% annuo.

Quanti euro potrà incassare il nonno Carlo? (1 € = 1936,27£).

---

2. Nel nucleo di un atomo si trovano protoni (con carica positiva) e neutroni (senza carica). Se un atomo "pesante", ovvero con un alto numero di protoni e neutroni, viene bombardato con un neutrone questo, grazie alla sua "neutralità", riesce a raggiungere il nucleo dell'atomo stesso provocandone una scissione in due atomi più leggeri. In questa trasformazione si libera molta energia (quella che "teneva unito" il nucleo originario) e "avanza" qualche neutrone. I neutroni così liberati possono colpire altri nuclei innescando così una reazione a catena. Bombardando una massa di Uranio 235 con neutroni quando un nucleo è colpito da uno di essi questo si scinde, approssimativamente, in due nuclei più leggeri liberando energia e 3 neutroni. Se la massa è abbastanza grande si innesca la reazione a catena ed ognuno dei 3 neutroni colpirà un nuovo nucleo liberando 3 neutroni che colpiranno nuovi nuclei… **Quale legge descrive il numero *N* di neutroni al variare del numero *u* di urti? Determina il suo grafico e descrivine le caratteristiche.**

---

3. Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri sapendo che $x_0 > 1$

a) 10^{x_0}

b) $5 \cdot (2)^{x_0}$

c) $2 \cdot (5)^{x_0}$

d) 5^{2x_0}

---

4. Data la successione definita dalla legge $\begin{cases} Y_0 = 100 \\ Y_n = 5Y_{n-1} \end{cases}$ **determina la legge che esprime le sue differenze prime.**

---

5. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

a) $3^{2x} = 27$

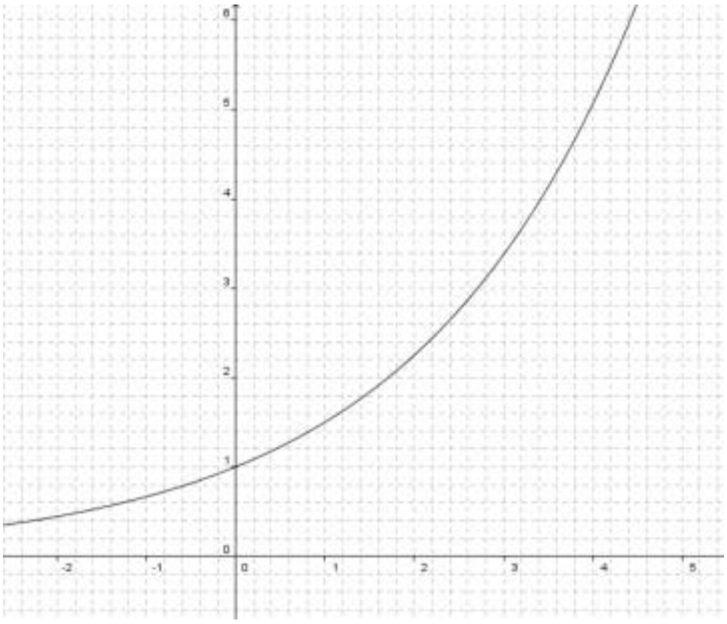
b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{8}$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}x} = 8$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}x} = 4$

---

6. Nel seguente grafico è rappresentata la funzione $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **:**



Determina, con il suo ausilio, un valore approssimato delle seguenti equazioni:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 5$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{5}} = x$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{2}} = 5$

---

7. Ogni ora il patrimonio di zio Paperone aumenta del 50%. Se alle 12 di un certo giorno Paperone possiede 64 fantastiliardi, quale sarà il suo patrimonio alle 16 dello stesso giorno?

a) 192 fantastiliardi

b) 256 fantastiliardi

c) 324 fantastiliardi

d) 486 fantastiliardi

e) 1024 fantastiliardi.

---

8. Silvano, l'uomo più ricco di Nettuno, possiede un'autostrada con molte corsie. In un momento di prosperità decide di aumentare il numero di corsie del 60 %. Successivamente, a causa di un'antica legge del pianeta, deve ridurre il numero di corsie di una certa percentuale X. **Dopo averlo fatto si ritrova con lo stesso numero di corsie che aveva all'inizio. Quanto vale X?**

a) 15%

b) 21,5%

c) 28%

d) 37,5%

e) 60%

(Da "I giochi di Archimede, Triennio", 2010).

Risorse

Documentazione e materiali

Scheda di lavoro per gli studenti dell'attività 1 fase 1 - Crescite

Scheda di lavoro per gli studenti dell'attività 1 fase 2 - Decrescite

File di geogebra per l'attività 1 fase 2 - Tasso alcolemico

Scheda di lavoro per gli studenti dell'attività 1 fase 3 - La variazione

File di geogebra conclusivo dell'attività 1 fase 3 - Variazioni

Foglio di calcolo per approfondire lo studio delle successioni esponenziali nell'attività 1 fase 3 - Successioni

File di geogebra per gli studenti dell'attività 2 fase 2 - Incrementi differenze

File di geogebra per gli studenti dell'attività 2 fase - Incrementi rapporti incrementali

Applet di geogebra per gli studenti dell'attività 2 fase 3 - http://www.geogebratube.org/student/m6022

File di geogebra per gli studenti dell'attività 2 fase 3 - Esponenziale1

File di geogebra conclusivo dell'attività 2 fase 3 - Esponenziale2

Foglio di calcolo per l'attività sui terremoti - Terremoti Italia

Bibliografia

Altre applicazioni ed esercizi interessanti sulle successioni esponenziali si trovano in Maraschini,W. e Palma, M. (2002), *MultiForMat Modulo 19: Potenze e logaritmi*, Paravia.

AAVV, Matematica 2003. *La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario.*

Sitografia

Matematica 2003

(Visitato nel maggio 2013)